



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fachrichtung Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **ST**

Erstellt: T. Fischer
am 01.08. 2000
Bearbeitet: M. Kreller
J. Kelling
F. Lemke
S. Majewsky
i. A. Dr. Escher
Aktualisiert: am 16.09. 2009

Stoß

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Allgemeine Grundlagen	2
2.1 Grundgleichungen der Mechanik	2
2.2 Impulserhaltung (IES)	2
2.3 Energieerhaltung der Mechanik (EES)	2
2.4 Stoßprozesse, Elastizität	3
3 Experimente	4
3.1 Fallrinne	4
3.2 Elastischer Stoß	4
3.3 Unelastischer Stoß	5
4 Anhang	6
4.1 Kreisgleichungen	6
4.2 Fehler	7
Fragen	8
Literatur	8

1 Aufgabenstellung

1. Der elastische Stoß zweier Körper a) gleicher und b) unterschiedlicher Masse ist in Abhängigkeit vom Stoßwinkel φ (schiefer bzw. ungerader Stoß) qualitativ zu untersuchen.
2. Der gerade unelastische Stoß zweier Körper gleicher Masse ist quantitativ zu untersuchen und die Stoßzahl k der verwendeten Materialien ist zu bestimmen.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Grundgleichungen der Mechanik

Die grundlegenden Gesetze der Mechanik spielen in diesem Versuch eine zentrale Rolle.

1. **Newton'sches Axiom:** Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn keine Kraft auf ihn wirkt.
2. **Newton'sches Axiom:** Die Ursache einer Impulsänderung ist eine auf den Körper wirkende Kraft, die über die Beziehung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

definiert ist. Mit $\vec{p} = m\vec{v}$ erhält man:

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Für den Fall einer zeitlich konstanten Masse ($\frac{dm}{dt} = 0$) ergibt sich das *Newton'sche Grundgesetz*:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

3. **Newton'sches Axiom:** Die Kraft F_{12} eines Körpers 1 auf einen Körper 2 ist immer umgekehrt gleich zur Kraft F_{21} des Körpers 2 auf den Körper 1 (actio = reactio), wenn keine weiteren Wechselwirkungen mit anderen Körpern existieren.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

2.2 Impulserhaltung (IES)

Aus dem 1. und 2. Axiom lässt sich ableiten, dass man einem System von Körpern, auf das keine äußeren Kräfte wirken, einen konstanten Impuls \vec{P} als Summe der Einzelimpulse \vec{p}_i zuordnen kann. Dieser ist vollkommen unabhängig von den Wechselwirkungen, die zwischen den einzelnen Körpern stattfinden, denn diese müssen sich nach dem 3. Axiom kompensieren. Damit lässt sich der Impulserhaltungssatz wie folgt formulieren:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} \quad \text{mit} \quad \vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i \quad (1)$$

2.3 Energieerhaltung der Mechanik (EES)

Den Energieerhaltungssatz der Mechanik erhält man durch Multiplikation des Newton'schen Grundgesetzes mit der Geschwindigkeit \vec{v} und anschließender Integration über die Zeit.

$$\int_{t_0}^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt' = m \int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{dt'} \cdot \vec{v} dt' \quad (2)$$

Das linke der beiden Integrale lässt sich für den Fall eines konservativen Kraftfeldes, d.h. es existiert ein Potenzial $V(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\text{grad } V$, berechnen. Man erhält dabei unter Berücksichtigung von $\vec{v} dt' = d\vec{r}'$:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = V(\vec{r}_0) - V(\vec{r}) \quad (3)$$

Die Potenzialdifferenz $V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)$ ist per Definition die potenzielle Energie E_{pot} , wobei man den Ort $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ frei wählen kann. Die rechte Seite des Integrals erhält man über partielle Integration:

$$\begin{aligned} m \cdot \int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{dt'} \cdot \vec{v} dt' &= m \cdot [\vec{v}^2]_{t_0}^t - \underbrace{m \cdot \int_{t_0}^t \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt'} dt'}_{= \text{linke Seite}} \\ \Rightarrow m \cdot \int_{t_0}^t \frac{d\vec{v}}{dt'} \cdot \vec{v} dt' &= \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2(t) - \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2(t_0) \end{aligned} \quad (4)$$

Die kinetische Energie E_{kin} wird hier repräsentiert durch den Term $\frac{m}{2}v^2$ und der zweite Term ist eine Konstante, denn auch $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ ist beliebig wählbar konstant. Der in Gleichung (2) dargestellte Energiesatz erhält nach Einsetzen von (3) und (4) und Benutzung der Definitionen für die potenzielle und kinetische Energie die Gestalt:

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$

Wenn man nun ein System aus mehreren Teilchen betrachten möchte, erhält man den Energieerhaltungssatz aus der Summe der Energien der einzelnen Teilchen.

$$\sum_i E_{\text{mech}}^i = \text{const.}$$

2.4 Stoßprozesse, Elastizität

Beim Stoß von zwei Körpern, die von außen unbeeinflusst bleiben, ist der Gesamtimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße (Glg. 1). Ebenso muss die Gesamtenergie immer eine Erhaltungsgröße sein. Die mechanische Energie, deren Erhaltung oben diskutiert wurde, muss jedoch nicht unbedingt erhalten bleiben. Es kann mechanische (bei Stoßprozessen speziell kinetische) Energie in andere Energieformen umgewandelt werden.

Wenn auch die mechanische Energie eine Erhaltungsgröße ist, spricht man von einem *vollkommen elastischen Stoß*. Wenn nur die kinetische Energie des Schwerpunktes als mechanische Energie verbleibt, spricht man von einem *vollkommen unelastischen Stoß* (d. h. es findet keine Relativbewegung der Stoßpartner mehr statt). Ein Parameter zur Kennzeichnung der Elastizität eines Stoßes ist die Stoßzahl k (siehe unten).

3 Experimente

3.1 Fallrinne

Die Messung von Impulsen bzw. Geschwindigkeiten ist mit einfachen Mitteln nur sehr schwer möglich. Mit Hilfe der Fallrinne lässt sich aber die Messung der Impulse auf die Messung von Längen (und Massen) reduzieren.

Die Geschwindigkeit v_1 der stoßenden Kugel ist bestimmt durch die Höhe \bar{h} der Rinne und die der gestoßenen Kugel ist vor dem Stoß $v_2 = 0$. Nach dem Stoß führen die beiden Kugeln eine geradlinige, gleichförmige Bewegung in x- und y-Richtung aus, werden allerdings mit g in z-Richtung beschleunigt. Aus dem Weg-Zeit-Gesetz in z-Richtung lässt sich eine Fallzeit t_F bestimmen, die für alle Kugeln gleichermaßen gilt.

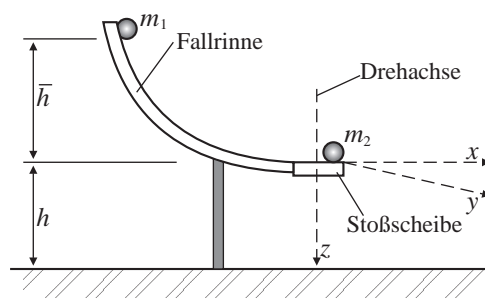


Abb. 1: Versuchsaufbau. Seitenansicht

$$z = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x(t) = v_x \cdot t \quad \text{und} \quad x_F = v_x \cdot t_F \Rightarrow x_F \sim v_x$$

Somit ist die Geschwindigkeit v_x bzw. v_y proportional zu den Orten x bzw. y des Auftreffens auf dem Papier.

3.2 Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß bleiben Impuls und mechanische Energie erhalten. Die Erhaltungssätze in vektorieller Form lauten dabei:

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' \quad (\text{IES}) \quad (5)$$

$$\frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 = \frac{m_1}{2} \cdot v_1'^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2'^2 \quad (\text{EES}) \quad (6)$$

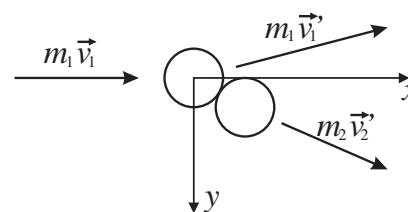


Abb. 2: Stoßschema

Wenn man die Gleichungen in ihre Komponenten zerlegt und berücksichtigt, dass man keine Geschwindigkeiten sondern Orte misst, erhält man für die Auftreffpunkte der Kugeln Kreisgleichungen (siehe Anhang).

Die Messung von v_1 erfolgt dabei, indem man die stoßende Kugel ohne einen Stoßpartner durch die Rinne laufen lässt und den Ort $x_0 = v_0 t_F$ misst. Die Mittelpunkte der beiden Kreise für stoßende und gestoßene Kugel sind dann am gleichen Punkt mit den Koordinaten:

$$x_m = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0 \quad \text{und} \quad y_m = 0 \quad (7)$$

Die Radien der beiden Kreise unterscheiden sich allerdings, da sie von den Massen von stoßender und gestoßener Kugel abhängen.

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_0 \quad \text{stoßende Kugel} \quad (8)$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0 \quad \text{gestoßene Kugel} \quad (9)$$

In dem Versuch sollen jetzt mit Hilfe der Fallrinne die Auftreffpunkte der Kugeln durch Blaupapier abgebildet werden. Dazu ist es notwendig das Papier und das Blaupapier fest auf der Unterlage zu justieren (mit Hilfe von Reißzwecken). Wichtig ist weiterhin, dass die Stoßplattform der Fallrinne genau horizontal ausgerichtet ist, was man durch eine Höhenjustage mit einer Libelle erreicht.

Der Nullpunkt unseres Koordinatensystems ist die senkrechte Projektion des Mittelpunktes der Stoßplattform auf das Papier. Das erreicht man durch Markieren eines *Lotpunktes* an der Vorderkante der Plattform und der Bestimmung des Radius.

Es erfolgen zwei Messungen:

1. Messen Sie zwischen $\varphi = -90^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ in 10° -Schritten. Dazu wird eine der beiden gleichschweren Stahlkugeln aus immer der selben Höhe (durch eine Kante markiert) auf die in einer kleinen Vertiefung der Plattform liegende zweite Kugel gestoßen. Vorher ist durch einfachen Durchlauf einer der beiden Kugeln der Punkt x_0 zu bestimmen und zu markieren.
2. Bei dieser Messung verwenden Sie unterschiedlich schwere Massen und ein neues Papier. Hier ist darauf zu achten, dass die Kugel mit der größeren Masse m_1 die stoßende Kugel ist.

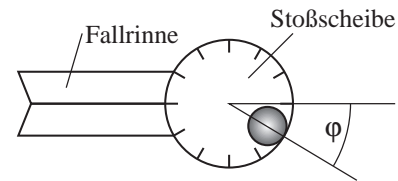


Abb. 3: Stoßscheibe. Draufsicht

Nach den Messungen erfolgt die Bestimmung der Massen der benutzten Kugeln. Mit diesen Information kann man dann die durch Gleichung (7) bzw. (8) und (9) definierten Kreise in das Bild der Auftreffpunkte eintragen. Die auftretenden Unterschiede zwischen den theoretischen Kreisen und den Messpunkten sind zu diskutieren.

3.3 Unelastischer Stoß

Betrachtet wird in diesem Experiment nur der gerade Stoß zweier Kugeln gleicher Masse und gleichen Materials. Der Stoßprozess läuft so ab, dass die Körper während der Wechselwirkung sich gegenseitig verformen. Je nachdem wie stark diese Verformung nach dem Stoß erhalten bleibt, handelt es sich um einen mehr oder weniger unelastischen Stoß. Der Energieerhaltungssatz der Mechanik gilt in diesem Fall nicht, denn es wird Energie in andere Energieformen umgewandelt (z. B. thermische Energie).

Zur qualitativen Beschreibung ist es sinnvoll, den Stoß in zwei Perioden zu unterteilen.

1. Die Körper drücken einander zusammen, von dem stoßenden Körper wird ein Impuls p_A an den gestoßenen abgegeben. Zum Zeitpunkt der größten Verformung bewegen sich beide Körper mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v (der gestoßene Körper ist vor dem Stoß in Ruhe, d. h. $v_2 = 0$):

$$p_A = m_1 \cdot (v_1 - v) = m_2 v$$

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (10)$$

2. Die beiden Körper dehnen sich wieder aus, zwischen den Körpern wird der Impuls p_B ausgetauscht, der im elastischen Fall kleiner oder gleich p_A ist.

$$p_B = m_1 \cdot (v - v'_1) = m_2 \cdot (v'_2 - v)$$

Der Quotient dieser beiden Impulse wird als Stoßzahl k bezeichnet und hat einen Wert zwischen $k = 1$ für einen vollkommen elastischen Stoß und $k = 0$ für den vollkommen unelastischen.

$$\frac{p_B}{p_A} = k \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (11)$$

Wenn man die Impulse p_A und p_B in die Gleichung (11) einsetzt und mit (10) die Geschwindigkeit v eliminiert, erhält man durch Erweitern mit t_F die Gleichung:

$$k = \frac{x_2 - x_1}{x_0} \quad (12)$$

Mit deren Hilfe können die Stoßzahlen für verschiedene Materialien bestimmt werden.

Da bei elastischeren Materialien das Abkippen der stoßenden Kugel von der Plattform einen anderen Auftreffpunkt erzeugt als den wahren Punkt x_1 (Warum?), ist es sinnvoll eine korrigierte Stoßzahl k' anzugeben, die x_1 nicht mehr zur Berechnung benötigt. Diese erhält man indem man den Impulssatz

$$m_1 v_0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

mit t_F multipliziert und wegen $m_1 = m_2$ die Gleichung

$$x_0 = x_1 + x_2$$

erhält. Diese eingesetzt in die Gleichung (12) ergibt für die korrigierte Stoßzahl k' :

$$k' = \frac{2x_2}{x_0} - 1$$

Wenn keine Fehler durch das Abkippen der stoßenden Kugel auftreten, stimmen k und k' überein.

Für die Messung bauen wir wieder die Fallrinne auf. Für mindestens drei der vier Materialien, die zur Verfügung stehen, werden die Orte x_0 , x_1 und x_2 je mindestens zehn mal bestimmt. Man muss also eine der beiden Kugeln zehn mal ohne einen Stoßpartner durchlaufen lassen und die Punkte x_0 markieren. Danach wird die Prozedur mit einem gleichartigen Stoßpartner gleicher Masse wiederholt und die Punkte x_1 und x_2 markiert. Der Nullpunkt dieser Messung ist jetzt der Lotpunkt.

Berechnen Sie die Stoßzahlen und die korrigierten Stoßzahlen für die gemessenen Materialien. Bestimmen Sie den Fehler dieser Größen aus der statistischen Streuung der Messwerte für x_0 , x_1 und x_2 .

4 Anhang

4.1 Kreisgleichungen

Die Gleichungen (5) und (6) lauten in Komponenten aufgedgliedert:

$$m_1 v_{1,x} = m_1 v'_{1,x} + m_2 v'_{2,x} \quad \text{IES} \quad (13)$$

$$0 = m_1 v'_{1,y} + m_2 v'_{2,y}$$

$$\frac{m_1}{2} \cdot v_{1,x}^2 = \frac{m_1}{2} \cdot (v'^2_{1,x} + v'^2_{1,y}) + \frac{m_2}{2} \cdot (v'^2_{2,x} + v'^2_{2,y}) \quad \text{EES} \quad (14)$$

Da wir keine Geschwindigkeiten messen, ersetzen wir nun die Geschwindigkeiten durch die Ortskoordinaten durch Multiplikation mit t_F bzw. t_F^2 . Die einzelnen Ortskoordinaten lauten:

$$x_i = v'_{i,x} t_F \quad \text{und} \quad y_i = v'_{i,y} t_F$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$m_1 x_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad \text{IES} \quad (15)$$

$$0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 \quad (16)$$

$$m_1 \cdot x_0^2 = m_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2) + m_2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) \quad \text{EES} \quad (17)$$

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgt durch geeignetes Quadrieren und Addieren:

$$m_1^2 \cdot (x_1^2 + y_1^2) = m_2^2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) + m_1^2 \cdot x_0^2 - 2m_1 m_2 \cdot x_0 x_2 \quad (18)$$

$$m_2^2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) = m_1^2 \cdot (x_1^2 + y_1^2) + m_1^2 x_0^2 - 2m_1^2 \cdot x_0 x_1 \quad (19)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (18) in (17) bzw. (19) in (17) und Umordnen erhält man für die gestoßene und die stoßende Kugel jeweils eine Kreisgleichung.

$$\left(x_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0\right)^2 + y_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} x_0\right)^2 \quad \text{stoßende Kugel} \quad (20)$$

$$\left(x_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0\right)^2 + y_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0\right)^2 \quad \text{gestoßene Kugel} \quad (21)$$

Beide Kreise haben die gleiche Mittelpunktskoordinate, aber unterschiedliche Radien.

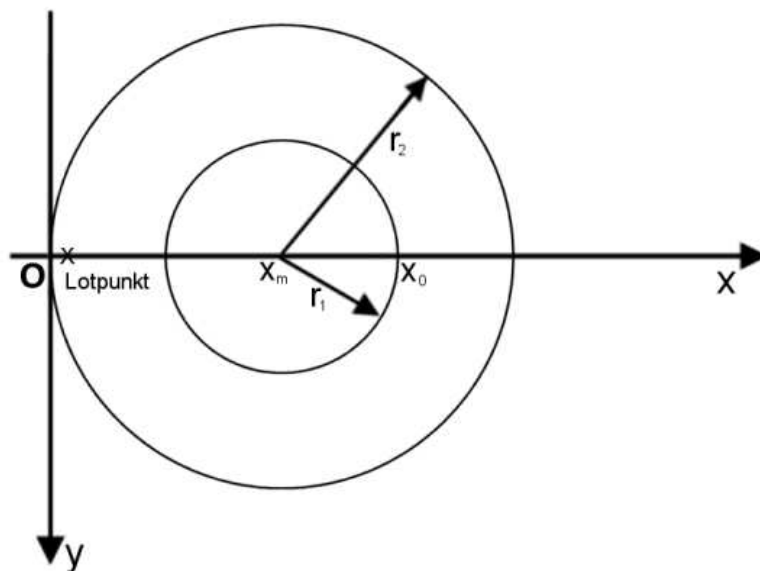


Abb. 4: Geometrische Figur der Auftreffpunkte der Kugeln

4.2 Fehler

Eine Fehlerrechnung ist notwendig für die beiden Stoßzahlen k und k' . Das Fehlerfortpflanzungsgesetz lautet für die beiden Fehler:

$$\Delta k = \left| -\frac{\Delta x_1}{x_0} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_0} \right| + \left| -\frac{x_2 - x_1}{x_0^2} \Delta x_0 \right|$$

$$\Delta k' = \left| \frac{2\Delta x_2}{x_0} \right| + \left| -\frac{2x_2 \cdot \Delta x_0}{x_0^2} \right|$$

Damit ist die Bestimmung der Fehler für k und k' reduziert auf die Bestimmung der Messfehler für die einzelnen x_i . Da hier aber die statistische Streuung der Messpunkte deutlich größer ist als der systematische Fehler der Messinstrumente (Bankmaßstab), ist letzterer gegenüber dem statistischen Fehler zu vernachlässigen.

Den statistischen Fehler einer Messgröße erhält man, wenn man die Standardabweichung σ aus den Einzelmessungen ermittelt. Der statistische Fehler der Messgröße ergibt sich dann aus σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}} \quad \text{wobei} \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$
$$\Delta x = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$$

Mit dem Faktor Zwei vergrößert man die Wahrscheinlichkeit der Reproduzierbarkeit im Rahmen der Fehlerangabe von $P = 0,68$ auf $P = 0,96$. Das heißt, im Intervall $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$ liegen 96 % aller Messergebnisse.

Die Berechnung dieser Fehler bzw. direkt die Berechnung von σ ist mit Hilfe der Statistikfunktionen eines Taschenrechners sehr einfach möglich. Die Angabe des Ergebnisses erfolgt in der Form:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

Man sollte dabei insbesondere auf die Anzahl der Stellen achten, deren Angabe mit Rücksicht auf den Fehler noch sinnvoll erscheint.

Fragen

1. Was bedeuten die Begriffe Impulserhaltung und Energieerhaltung in der Mechanik?
2. Wann gelten diese Erhaltungssätze?
3. Warum kann man das Stoßexperiment auf das Messen von Längen reduzieren?
4. Was ist der Unterschied zwischen elastischem und unelastischem Stoß?
5. Wie ist die Stoßzahl definiert?
6. Welche Bedeutung kommt der Stoßzahl zu, was gibt sie an?
7. Warum führt man bei sehr elastischen Materialien eine korrigierte Stoßzahl k' ein?
8. Was versteht man unter einem konservativen Kraftfeld?
9. Warum entstehen Kreise als geometrische Figuren der Auftreffpunkte?

Literatur

- [1] W. Demtröder, *Experimentalphysik I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1994
- [2] C. Gerthsen, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin 1997
- [3] A. Recknagel, *Physik: Mechanik*, Technik-Verlag, Berlin 1990