TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN **Fachrichtung Physik** Physikalisches Grundpraktikum	Versuch: **RF** Erstellt: L. Jahn Bearbeitet: M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky, i. A. Dr. Escher Aktualisiert: am 29. 03. 2010

Innere Reibung von Flüssigkeiten

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Zähigkeit η der Versuchsflüssigkeit von der Temperatur T. Dazu sind für fünf verschiedene Temperaturen zwischen Raumtemperatur und 50 °C je zwei Messungen durchzuführen.
2. Ermitteln Sie aus der Grafik $\ln \eta = f(\frac{1}{T})$ die Koeffizienten A und b der *Andradeschen Gleichung*.
3. *(Für Physikstudenten)* Geben Sie die Standardabweichungen der Andradeschen Koeffizienten an. Berechnen Sie die *Reynoldssche Zahl Re* für die höchste Temperatur.
4. Bestimmen Sie aus der grafischen Darstellung des natürlichen Logarithmus der Viskosität ($\ln \eta$) über dem Reziproken der Temperatur ($1/T$) den Maximalfehler des Anstiegs (Δb). Tragen Sie dazu die Fehlerflächen der Messwerte sowie die Geraden minimalen und maximalen Anstiegs in die grafische Darstellung ein.
5. *(Für Physikstudenten)* Überprüfen Sie anhand der berechneten *Reynoldsschen Zahl*[1], ob die Strömung laminar war.
6. Diskutieren Sie den Einfluss der fehlerhaften Größen auf den Fehler von b.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Newtonsche zähe Flüssigkeiten

Flüssigkeiten, deren (Schub-) Viskosität im Bereich der *laminaren* Strömung eine nur von der Temperatur abhängige Konstante ist, heißen *Newtonsche Flüssigkeiten*.

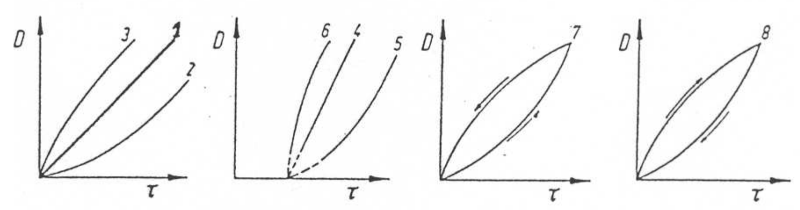

Abb. 1: Geschwindigkeitsgradient $D = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}z$ in Abhängigkeit von der Schubspannung τ
1: Newtonsche Flüssigkeit
2,3: Suspensionen (Kakao), Kolloide, Schmelzen
4,5,6: Plaste mit Fließgrenzen (Ton, Kitt, Pasten)
7,8: zeitabhängiges Verhalten mit Hysterese [2]

[1] O. Reynolds 1842-1912

Strömt eine Newtonsche Flüssigkeit laminar in x-Richtung an einer Wand (oder einem Hindernis) entlang, so gleiten Flüssigkeitsschichten in der x-y-Ebene aufeinander ab und verursachen dabei eine Schubkraft F_x (tangentiale Reibungskraft), für die der *Newtonsche Ansatz* gilt:

$$F_x = \eta \cdot A_{xy} \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1a}$$

$$\tau = \frac{F_x}{A_{xy}} = \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1b}$$

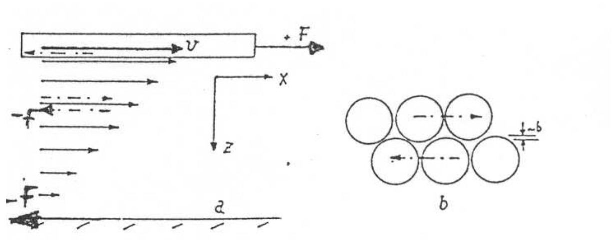

Abb. 2: Kräfte und Geschwindigkeitsabnahme zwischen aneinander abgleitenden Schichten in der zähen Flüssigkeit zwischen bewegter und ruhender Platte (a); mikroskopisch (b)

Dabei sind η der Koeffizient der (dynamischen) Viskosität oder Zähigkeit, A die Fläche, $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}$ der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zu $\vec{v}$ und τ die Schubspannung (vgl. Abb. 2).

2.2 Temperaturabhängigkeit der Viskosität

Die Viskosität von Flüssigkeiten nimmt im Bereich der Raumtemperatur mit steigender Temperatur monoton ab. Bei vielen Flüssigkeiten kann der Temperaturgang mit zwei Konstanten A und b nach *Andrade* beschrieben werden:

$$\eta(T) = A \cdot \mathrm{e}^{b/T} \tag{2}$$

Dabei ist $A = \eta_\infty$ der hypothetische η-Wert bei $T = \infty$ und in b steckt im wesentlichen die Aktivierungsenergie als Höhe von Potentialwällen bei Platzwechselvorgängen (s. Abb. 2(b)) in der Flüssigkeit, die der *Boltzmann-Statistik* genügen. Für die Wahrscheinlichkeit w gilt dabei:

$$w \sim \mathrm{e}^{-\frac{b}{T}} \sim \frac{1}{\eta}$$

Die Auswertung der $\eta(T)$-Messungen erfolgt anhand der *Arrhenius-Auftragung*:

$$\ln \eta(T) = \ln A + \frac{b}{T} \tag{3}$$

3 Experimente

3.1 Kugelfall-Methode

Eine Kugel vom Radius R bewegt sich mit geringer (laminare Strömung!) Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einer (Newtonschen) zähen Flüssigkeit. Dabei resultiert als Folge von Gleichung (1) die *Reibungskraft nach Stokes*[2]:

$$\vec{F} = -6\pi \cdot \eta\, R \cdot \vec{v} \tag{4}$$

Bei der *absoluten* Kugelfall-Methode läßt man eine Kugel, deren Radius und Dichte bekannt sind, in der Achse eines weiten ($r \gg R$) mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte ρ_f) gefüllten Zylinders (Radius r) fallen. Man bestimmt die Endgeschwindigkeit v_e, die sich ergibt, wenn Schwerkraft, Auftriebskraft und Reibungskraft nach Gleichung (4) im Gleichgewicht stehen:

$$\rho_k \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \cdot g - \rho_f \cdot \frac{4\pi \cdot R^3}{3} \cdot g = 6\pi \cdot \eta\, R \cdot v_e \tag{5}$$

Dann gilt für die Viskosität im Idealfall sehr großer Gefäßweite:

$$\eta = (\rho_k - \rho_f) \cdot \frac{2R^2 \cdot g}{9v_e} \tag{6}$$

[2] G. G. Stokes 1819-1903

3.2 Höppler-Viskosimeter

Das *Höppler-Viskosimeter* stellt eine technische Variante der Kugelfall-Methode dar, bei dem das mit der Flüssigkeit gefüllte und leicht geneigte Rohr nur wenig größer als der Kugelradius ist und die Kugel an einer Rohrwand abwärts gleitet. Damit braucht man bei Messungen mit dem Durchfluß-Thermostaten nur ein vergleichseweise geringes Flüssigkeitsvolumen zu temperieren. Mit der vom Hersteller angegebenen Fallkörper-Konstate K und t als Fallzeit zwischen zwei Messmarken gilt:

$$\eta = K \cdot (\rho_k - \rho_f) \cdot g \cdot t \tag{7}$$

Diese Methode ist im Physikalischen Praktikum realisiert.

4 Hinweise zu den Versuchen

4.1 Prüfung auf laminare Strömung

Bei höheren Temperaturen könnte bei gegebener Geschwindigkeit die laminare Strömung in die turbulente umschlagen, sodass unter Umständen die Anwendung der Gesetze (4) bis (7) zu Fehlern führen würde. Eine Überprüfung des möglichen Umschlags zur Turbulenz kann anhand der *kritischen Reynoldsschen Zahl* Re_{krit} erfolgen. Die dimensionslose Reynoldssche Zahl Re als Verhältnis von Reibungs- und Beschleunigungs-Arbeit berechnet sich mit l^* als charakteristischer Länge zu:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l^*}{\eta} \tag{8}$$

Rohr Hierbei ist die charakteristische Länge $l^* = d = 2r$ damit folgt [1][3][5]:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} \quad \text{mit} \quad Re_{\text{krit}} \approx 2200 \tag{9}$$

Kugel Mit der charakteristichen Länge $l^* = 2\,R$ folgt für diesen Fall [7]:

$$Re = \frac{2R \cdot \rho \cdot v}{\eta} \quad \text{mit} \quad Re_{\text{krit}} \approx 1000 \tag{10}$$

Der Quotient η/ρ heißt kinematische Zähigkeit. Es empfiehlt sich, zu dem jeweils niedrigsten gemessenen η-Wert anhand der eigenen Messdaten die Reynoldssche Zahl zu bestimmen und mit dem kritischen Wert zu vergleichen.

5 Anhang

5.1 Viskositätswerte

5.2 Prüfung auf Newtonsches Verhalten*

Um zu entscheiden, ob eine Flüssigkeit Newtonsches Verhalten zeigt oder nicht, müsste anhand der Beziehungen (4) bzw. (7) die Konstanz des Proportionalitätsfaktors η bei Variation der Kräfte bzw. Druckdifferenzen getestet werden. Beim Höppler-Viskosimeter gelingt das in geringem Maße durch Einsatz verschiedener Kugeln mit unterschiedlichen Dichten und Radien.

Flüssigkeit	Temperatur / °C	η /Ns $\cdot$ m^{-2}
Wasser	0	$1{,}787 \cdot 10^{-3}$
	20	$1{,}002 \cdot 10^{-3}$
	50	$0{,}547 \cdot 10^{-3}$
Ethanol	0	$1{,}78 \cdot 10^{-3}$
	20	$1{,}2 \cdot 10^{-3}$
	50	$0{,}7 \cdot 10^{-3}$
Glyzerin	0	12,1
	20	1,48
	50	0,18

Tabelle 1: Zähigkeitswerte einiger Flüssigkeiten

5.3 Zur Herleitung*

5.3.1 Hagen-Poiseuille

Am koaxialen Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r und der Länge l greift am Mantel die folgende Reibungskraft an:

$$F_R = 2\pi \cdot r\, l\, \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = A^* \cdot \eta \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$$

Zusätzlich greift und an der Stirnfläche eine Druckkraft an:

$$F_p = \pi \cdot r^2 \cdot \Delta p = A \cdot \Delta p$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung $F_R = F_p$ folgt nach einer Integration[5] zunächst das parabelförmige Geschwindigkeitsprofil $v(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta p}{2\eta \cdot l} \cdot r \quad \Rightarrow \quad v(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot r^2 \quad \text{mit} \quad v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot l} \cdot R^2 \tag{11}$$

Weiter wird das Volumen und dessen zeitliche Änderung betrachtet, das zwischen zwei Schichten mit den Radien r und $r + \mathrm{d}r$ ströment

$$\mathrm{d}V = 2\pi \cdot r\, \mathrm{d}r \mathrm{d}s \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2\pi \cdot v(r) \cdot r\, \mathrm{d}r$$

Damit ergibt eine Integration über den ganzen Querschnitt:

$$\frac{V}{t} = 2\pi \cdot \int_0^R v(r)\, \mathrm{d}r = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8\eta \cdot l} \cdot R^4 \tag{12}$$

5.3.2 Stokes

Die Stokes'sche Gleichung (4) wird exakt in der theoretischen Hydrodynamik hergeleitet (z. B in [8]). Ein grobe Abschätzung, in der das Geschwindigkeits-Gefälle in (1) vereinfacht wird zu $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \approx \frac{v}{r}$ und als gleich auf der ganzen Kugeloberfläche angenommen wird ($A \approx 4\pi \cdot r^2$) liefert den zu geringen Wert:

$$F \approx 4\pi \cdot \eta\, r^2 \cdot \frac{v}{r} \approx 4\pi \cdot \eta\, r \cdot v \tag{13}$$

Fragen

1. Was versteht man unter einer laminaren und einer turbulenten Strömung?
2. Wie berechnet sich der Strömungswiderstand in einer laminaren und in einer turbulenten Rohrströmung?
3. Man prüfe anhand eines Beispiels aus Tabelle 1 die Gültigkeit der Gleichung (3) und bestimme die Konstanten A und b.
4. Was versteht man unter einer Newtonschen Flüssigkeit? Wie kann der Nachweis dafür erbracht werden?
5. Wie ist die Reynoldsche Zahl definiert?
6. Berechnen Sie $x(t)$ für die Start-Phase einer Kugel, die in einer zähen Flüssigkeit zu fallen beginnt. Nach welcher Strecke erreicht die Kugel 0,67v_e bzw. 0,99v_e?
   (Beispiel: $\rho_k = 8\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $\rho_f = 1\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$; $R = 3\,\mathrm{mm}$)
7. Wie unterscheiden sich Ursache und Temperaturabhängigkeit der Viskosität von Flüssigkeiten und Gasen?
8. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil in einer laminaren Rohrströmung und für eine umströmte Kugel.
9. Was besagt das Gesetz von Stokes zur inneren Reibung?
10. Wie lautet das Gesetz von Hagen-Poiseuille?

Literatur

[1] A. Recknagel, *Physik: Mechanik*, Technik-Verlag, Berlin 1990

[2] F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 2/3*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1985

[3] F. X. Eder, *Moderne Messmethoden der Physik, Band 1: Mechanik, Akustik*, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960

[4] H. J. Paus, *Physik in Experimenten und Beispielen*, Verlag C.-Hanser, München 1995

[5] C. Gerthsen, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1995

[6] A. W. Francis, *Physics 4, 404*, , 1933

[7] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Verlag de Gruyter, Berlin 1954

[8] G. Joos, B. Fricke, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Aula-Verlag, Wiesbaden 1989