

8.3. Hertzscher Dipol (zeitabh. elektrischer Dipol)

Quellen elektromagnetischer Wellen:

beschleunigt bewegte Ladungen und zeitlich veränderliche Ströme

Einfache Beispiele: zeitabhängiger elektrischer Dipol

zeitabhängiger magnetischer Dipol \implies Übung

Zeitabhängiger elektrischer Dipol (am Ursprung):

Ladungsdichte (siehe Übung Blatt 10/Aufg. 1): $\rho_D(\vec{r}, t) = -\dot{\vec{p}}(t) \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r})$

Stromdichte folgt aus Kontinuitätsgleichung:

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D = \frac{\partial \rho_D}{\partial t} = -\frac{\partial \dot{\vec{p}}(t)}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \ddot{\vec{p}} \delta(\vec{r}) \implies \vec{J}_D(\vec{r}, t) = \dot{\vec{p}} \delta(\vec{r})$$

Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \vec{A}^L(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\dot{\vec{p}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \end{aligned}$$

Skalares Potential:

$$\begin{aligned} \phi^L(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{-\dot{\vec{p}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \delta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \delta(\vec{r}') (-\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot) \frac{\dot{\vec{p}}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r} \end{aligned}$$

Aus $\vec{A}^L(\vec{r}, t)$ und $\phi^L(\vec{r}, t)$ und folgen die Felder

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \phi^L(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}^L(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}^L(\vec{r}, t)$$

Magnetfeld:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{\vec{p}}}{cr} + \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2} \right) \times \vec{e}_r \quad \text{mit } \vec{p} = \vec{p}(t_r), \quad t_r = t - \frac{r}{c}, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Elektrisches Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{c^2 r} \left[\vec{e}_r (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r) - \ddot{\vec{p}} \right] + \frac{1}{cr^2} \left[3\vec{e}_r (\dot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r) - \dot{\vec{p}} \right] + \frac{1}{r^3} \left[3\vec{e}_r (\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p} \right] \right\}$$

Anmerkungen:

- Für den statischen Dipol gilt $\dot{\vec{p}} = 0$ und damit $\vec{B} = 0$ sowie
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3\vec{e}_r (\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p} \right]$$

→ reproduzieren das Ergebnis aus der Elektrostatik
- Die einzelnen Terme von \vec{E} und \vec{B} haben unterschiedliche Potenzen von $\sim 1/r$ und klingen damit unterschiedlich schnell ab
- Für das **Fernfeld** (große Entfernungen r) sind nur Terme $\sim 1/r$ relevant. Sie sind alle proportional zu $\ddot{\vec{p}}$!

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\vec{p}}(t_r) \times \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\vec{e}_r (\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{e}_r) - \ddot{\vec{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[-\vec{e}_r \times (\ddot{\vec{p}} \times \vec{e}_r) \right] = c\vec{B} \times \vec{e}_r$$

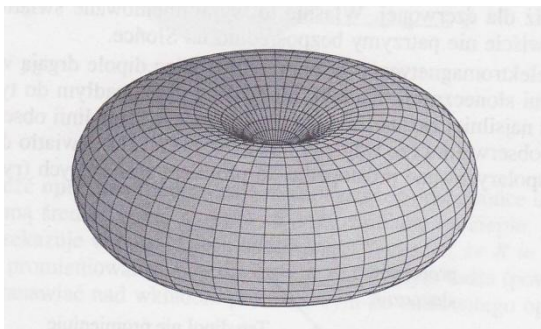
Für das Fernfeld bilden \vec{e}_r , \vec{B} und \vec{E} ein Dreibein!

Wellen sind für sehr große r „Kugelwellen“ mit Amplitude $\sim 1/r$, aber **lokal wie ebene Wellen**

Energieabstrahlung des Hertzchen Dipols:

Für die Energieabstrahlung (Energietransport ins Unendliche) ist nur das Fernfeld von Bedeutung!

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{\text{Fernfeld}} \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \times \vec{e}_r) \times \vec{B} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{(\ddot{\vec{p}}(t_r) \times \vec{e}_r)^2}{r^2} \vec{e}_r \\ &= \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}^2(t_r) \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 c r^2} \vec{e}_r \quad (\vartheta \text{ Winkel zwischen } \vec{e}_r \text{ und } \vec{p})\end{aligned}$$



Energieflussdichte besitzt Zylindersymmetrie, aber anisotrop bezüglich der ϑ -Richtung

⇒ Richtwirkung einer Antenne

Abgestrahlte Leistung des Dipols

(= Energiefluss durch Kugeloberfläche mit Radius $R \rightarrow \infty$)

$$P = \oint_{R \rightarrow \infty} d\vec{a} \cdot \vec{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta R^2 \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}^2(t_r) \sin^2 \vartheta}{16\pi^2 c R^2} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{\vec{p}}^2(t_r)$$

Spezialfall: harmonisch oszillierender Dipol

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \cos \omega t \Rightarrow P(t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \cos^2(\omega(t - R/c))}{6\pi c}$$

Mittelung über eine Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\bar{P}(t) = \frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi c} \omega^4 \Rightarrow \text{starke Frequenzabhängigkeit } \sim \omega^4 !$$

(Grund für Himmelsblau und Abendrot)