Theoretische Mechanik

(Bachelor of Education)

C. Timm
Technische Universität Dresden, Institut für Theoretische Physik
Satz: Christina Krüger
mit einigen Korrekturen gesetzt von Martin Körber

Sommersemester 2009

Stand: 18. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**
1.1 Warum Theoretische Physik im Lehramtsstudium? . . . 3
1.2 Ziele und Arbeitsweise der Theoretischen Mechanik . . . 3
1.3 Überblick . . . 4
1.4 Mehr oder weniger empfohlene Lehrbücher . . . 5

2 Kinematik **6**
2.1 Koordinatensysteme . . . 7
2.1.1 Kartesische Koordinaten . . . 7
2.1.2 Kugelkoordinaten . . . 7
2.1.3 Zylinderkoordinaten . . . 9
2.1.4 Natürliche Koordinaten . . . 10
2.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung . . . 11
2.3 Kreisbewegung . . . 11

3 Newton-Mechanik **13**
3.1 Das Trägheitsgesetz . . . 13
3.2 Das Bewegungsgesetz . . . 13
3.3 Das Reaktionsprinzip . . . 14
3.4 Das Superpositionsprinzip . . . 14
3.5 Kraftfelder . . . 15
3.6 Beispiele für Kräfte . . . 15
3.6.1 Gewichtskraft . . . 15
3.6.2 Gravitationskraft . . . 15
3.6.3 Coulomb-Kraft . . . 15
3.6.4 Lorentz-Kraft . . . 16
3.6.5 Federkraft . . . 16
3.6.6 Reibungskräfte . . . 16
3.7 Wechsel des Bezugssystems . . . 16
3.7.1 Translationen . . . 17
3.7.2 Rotationen . . . 17
3.8 Die Newtonsche Bewegungsgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung . . . 20
3.9 Der harmonische Oszillator . . . 23
3.9.1 Gedämpfter harmonischer Oszillator . . . 25
3.9.2 Getriebener harmonischer Oszillator . . . 27
3.10 Arbeit und Energie . . . 28
3.10.1 Arbeit . . . 28
3.10.2 Leistung . . . 30
3.10.3 Kinetische Energie und Energieerhaltung . . . 30
3.11 Drehimpuls und Drehmoment . . . 31
3.12 Zentralkräfte . . . 32
3.13 Die Planetenbewegung . . . 33

4 Mehrteilchensysteme **37**
4.1 Erhaltungssätze bei Systemen mehrerer Massenpunkte . . . 37
4.1.1 Impulserhaltung . . . 37
4.1.2 Drehimpulserhaltung . . . 38
4.1.3 Energieerhaltung . . . 38
4.2 Der Virialsatz . . . 39
4.3 Zwei-Teilchen-Systeme . . . 41
4.3.1 Die Planetenbewegung . . . 41
4.4 Streuprozesse . . . 42
4.5 Kleine Schwingungen . . . 45

5 Der starre Körper **47**
5.1 Kinematik des starren Körpers . . . 48
5.1.1 Der Trägheitstensor . . . 49
5.1.2 Steinerscher Satz . . . 50
5.1.3 Der Drehimpuls des starren Körpers . . . 51
5.2 Die Bewegungsgleichung des Kreisels . . . 52
5.2.1 Die Euler-Winkel . . . 52
5.2.2 Die Euler-Gleichungen . . . 52
5.3 Der kräftefreie Kreisel . . . 54
5.3.1 Rotation um freie Achsen . . . 54
5.3.2 Der symmetrische Kreisel . . . 55

6 Lagrange-Mechanik **57**
6.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte . . . 58
6.1.1 Holonome Zwangsbedingungen . . . 58
6.1.2 Nicht-holonome Zwangsbedingungen . . . 59
6.2 Generalisierte Koordinaten . . . 60
6.3 Das d'Alembertsche Prinzip . . . 60
6.4 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen . . . 62
6.4.1 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen . . . 65
6.5 Verallgemeinerte Potentiale . . . 66
6.6 Das Hamiltonsche Prinzip . . . 67
6.7 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung . . . 70
6.7.1 Das Noether-Theorem . . . 70
6.7.2 Hamilton-Funktion und Energie . . . 71
6.8 Relativistische Mechanik . . . 72
6.8.1 Einsteins Postulate . . . 72
6.8.2 Die Lorentz-Transformation . . . 73
6.8.3 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit . . . 75
6.8.4 Lagrange-Gleichung für das freie Teilchen . . . 76
6.8.5 Lagrange-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . 77

7 Hamilton-Mechanik **80**
7.1 Kanonische Gleichungen . . . 80
7.1.1 Zyklische Koordinaten . . . 81
7.1.2 Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . 82
7.1.3 Forminvarianz unter Punkttransformationen . . . 83
7.2 Die Poisson-Klammern . . . 83
7.2.1 Poissonscher Satz . . . 85
7.3 Kanonische Transformationen . . . 86
7.3.1 Äquivalente erzeugende Funktionen . . . 87
7.4 Hamilton-Jacobi-Theorie . . . 88

Kapitel 1

Einführung

1.1 Warum Theoretische Physik im Lehramtsstudium?

- ... weil Sie Sachverhalte verstehen müssen, um sie erklären zu können. Nur wenn Sie ein über den Unterrichtsstoff hinaus gehendes Verständnis haben, können Sie entscheiden, welche begrifflichen Hilfsmittel Sie in der konkreten Situation bei der Erklärung verwenden wollen und welche Details Sie erwähnen oder weglassen sollten. Mit Bertolt Brecht: „Ich rate, lieber mehr zu können als man macht, als mehr zu machen als man kann.“

- ... weil Sie aktuelle Entwicklungen in der Physik nur dann verfolgen und ggf. im Unterricht behandeln können (Nobelpreise!), wenn Sie sie in ein Gesamtkonzept einordnen können.

- ... weil die Vorlesungen der Experimentalphysik manchmal nicht die Zusammenhänge und die zu Grunde liegenden Prinzipien heraus stellen. Damit besteht die Gefahr, dass die Physik als Reihung von zusammenhanglosen Erfahrungstatsachen erscheint.

- ... weil nur im Zusammenwirken von Experiment und Theorie naturwissenschaftliche Erkenntnis gewonnen werden kann. Das ist im Unterricht genauso.

- ... weil die Theoretische Physik Sie die Welt auf einem fundamentaleren Niveau verstehen lässt, was intellektuell und ästhetisch befriedigend ist, unabhängig vom praktischen Nutzen.

1.2 Ziele und Arbeitsweise der Theoretischen Mechanik

Die Theoretische Mechanik soll folgendes leisten:

- *Verständnis* der Bewegungen materieller Körper unter dem Einfluss von Kräften. Erkennen der zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeiten.

- *Beschreibung* der Bewegungen materieller Körper unter dem Einfluss von Kräften. Voraussage der Bewegungen.

Wir werden zunächst klären müssen, was die hier auftretenden Begriffe, insbesondere der Begriff der *Kraft*, genau bedeuten.

Die Theoretische Mechanik hat also, wie allgemein die Theoretische Physik, das zweifache Ziel des Verständnisses von allgemeinen Gesetzmäßigkeiten und der quantitativen Beschreibung von Vorgängen. Diese beiden Ziele hängen eng zusammen. Die Arbeitsweise der Theoretischen Physik besteht in der Formulierung von *Theorien*, d.h. Beschreibungen der allgemeinen Gesetzmäßigkeiten. Aus einer brauchbaren Theorie lassen sich Voraussagen für Experimente herleiten, die dann gestatten, die Theorie zu überprüfen. Wie der Naturphilosoph Sir Karl Popper sagte, kann man eine Theorie niemals beweisen aber im Prinzip leicht widerlegen (falsifizieren). Experimente, die mit den Vorhersagen einer Theorie übereinstimmen, *stützen* diese, beweisen sie aber nicht. Für die Widerlegung reicht dagegen *eine* Beobachtung aus, die der Theorie widerspricht. Das Experiment ist immer die letzte Instanz in der Physik – die Grundgleichungen der Theoretischen Mechanik lauten so und nicht anders, weil umfangreiche Experimente *diese* und nicht andere Gleichungen stützen.

Einige Bemerkungen hierzu:

- Man muss sich klar machen, was Popper mit „beweisen“ meinte: Man kann eine Theorie nicht *in mathematischer Strenge* beweisen, aber viele physikalische Theorien sind im „juristischen“ Sinne bewiesen, nämlich „nach menschlichem Ermessen“ wahr. Die englische Formulierung „without reasonable doubt“ ist noch treffender.
- Die strikte Widerlegung einer Theorie durch ein Experiment im Sinne Poppers ist auch eine idealisierte Vorstellung, da man nie absolut sicher ist, dass ein Experiment wirklich zeigt, was man denkt, dass es zeigt.
- Viele Theorien sind im Sinne Poppers falsifiziert. Zum Beispiel wissen wir, dass die Theoretische Mechanik falsche Voraussagen macht, wenn wir sie auf mikroskopische Objekte wie Atome oder Elementarteilchen anwenden. Das bedeutet nicht, dass die Theoretische Mechanik nutzlos oder nur von historischem Interesse wäre. Wir wissen heute, dass sie den Grenzfall einer allgemeineren Theorie darstellt, nämlich der Quantenmechanik und letztlich der Quantenfeldtheorie. Es ist gut verstanden, unter welchen Bedingungen sie präzise Voraussagen macht. In diesen Fällen wäre es unsinnig, die viel kompliziertere Quantenfeldtheorie zu verwenden: Niemand wird ernsthaft versuchen, die Frequenz eines Federpendels im Rahmen der Quantenfeldtheorie zu berechnen.

Die Theoretische Physik formuliert die zu Grunde liegenden Gesetzmäßigkeiten in der Sprache der Mathematik, weil das die für die Beschreibung quantitativer Zusammenhänge am besten geeignete Sprache ist. Daher werden wir zahlreiche mathematische Methoden verwenden. Aber Theoretische Physik ist nicht Mathematik, ähnlich wie ein Werk der Literatur nicht mit der Sprache identisch ist, in der es verfasst ist. Die Formulierung verwendet meist Begriffe der Analysis und der Linearen Algebra, nicht selten aber auch solche der Gruppentheorie und Geometrie.

Die speziell in der Theoretischen Mechanik notwendigen mathematischen Hilfsmittel sind insbesondere

- Lineare Algebra
- Analysis (Differential- und Integralrechnung), einschließlich Vektoranalysis
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Variationsrechnung

Diese werden in der Vorlesung entwickelt oder wiederholt, soweit es notwendig erscheint. Variationsrechnung ist z.B. praktisch nie Stoff von Einführungsvorlesungen in der Mathematik.

1.3 Überblick

Wir werden in dieser Vorlesung folgende Kapitel behandeln:

- Kinematik – Definition der Begriffe, die wir zur Beschreibung der Bewegung von Körpern brauchen
- Newton-Mechanik – Newtons Axiome und Anwendungen
- Planetenbewegung – die Motivation und historisch bedeutendste Anwendung der Newton-Mechanik
- Mehrteilchensysteme – Erhaltungssätze, Stöße, kleine Schwingungen
- Mechanik des starren Körpers – Rotationen und Kreiseltheorie
- Zwangsbedingungen und Lagrange-Mechanik – eine alternative Formulierung der Mechanik, die nicht vom Koordinatensystem abhängt und auch anwendbar ist, wenn die Bewegung Zwangsbedingungen unterworfen ist
- Hamilton-Mechanik – eine noch allgemeinere Formulierung der Mechanik unter Verwendung des Phasenraumes
- Hamilton-Jacobi-Theorie – ein allgemeines Lösungsverfahren für mechanische Probleme, zugleich eine Formulierung, die den Übergang zur Quantenmechanik erleichtert
- Relativistische Mechanik – wie ändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Relativgeschwindigkeiten nicht klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind?

- Chaos – integrable und nicht integrable Dynamik und ihre Konsequenzen

Aufgrund der Kürze dieser Mechanik-Vorlesung von 3 SWS werden wir einige Themen nur anreißen können.

1.4 Mehr oder weniger empfohlene Lehrbücher

- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 1: Klassische Mechanik*, 8. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2006) und *Band 2: Analytische Mechanik*, 7. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 2006): Die gesamte Reihe von Lehrbüchern ist empfehlenswert. Nolting legt relativ großes Gewicht auf das Einüben der Formalismen und entsprechend weniger auf die ausführliche Diskussion des physikalischen Gehaltes. Er führt Herleitungen oft im Detail vor, wo andere Autoren nur das Ergebnis angeben. Die Darstellung ist fast immer klar. Die Bücher enthalten viele gut Übungsaufgaben mit Lösungen und Kontrollfragen. Die Theoretische Mechanik ist auf zwei Bände verteilt. Der 1. Band beginnt mit einer recht ausführlichen Wiederholung der relevanten mathematischen Methoden. Angenehmes Format und Layout. Leider ohne Literaturverzeichnis. Moderne Themen wie Integrabilität und Chaos fehlen. Relativistische Mechanik fehlt ebenfalls und wird in Band 4 behandelt.

- H. Goldstein, C. P. Poole und J. L. Safko, *Klassische Mechanik*, 3. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2006): Der Klassiker in neuer Auflage, aus dem Generationen von Studierenden Mechanik gelernt haben. Legt mehr Gewicht auf Diskussion und weniger auf mathematische Zwischenschritte, verglichen mit Nolting. Der zusätzliche Text hilft aber nicht unbedingt beim Verständnis. In einigen Abschnitten unnötig kompliziert oder obskur. Neigt dazu, Methoden aus dem Hut zu ziehen, ohne zu verraten, worauf sie beruhen (nämlich meist auf Symmetrieargumenten). Enthält ein Kapitel über relativistische Mechanik. Die neue Auflage hat moderne Kapitel wie Chaos und numerische (computergestützte) Übungsaufgaben ergänzt, ohne den vorhanden Text wesentlich zu verändern. Insgesamt ein geeignetes Buch für Studierende, die sich den Stoff selbst erarbeiten.

- L. D. Landau und Je. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1: Mechanik*, 14. Aufl. (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1997/2004): Der andere Klassiker, Teil einer Reihe von russischen Lehrbüchern. Der Band zur Mechanik ist brutal knapp gehalten und überraschenderweise nicht frei von Fehlern. Zwischenschritte werden selten angegeben und die Diskussionen sind kürzer als bei Goldstein. Modernere Themen fehlen. Enthält meist schwierige Übungsaufgaben ohne Lösungen. Die relativistische Mechanik bildet ein Kapitel des zweiten Bandes über Elektrodynamik und Allgemeine Relativitätstheorie.

- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 8. Aufl. (Wiley-VCH, Weinheim, 2008): Ein gutes deutsches Lehrbuch mit einem hohen Anteil von Beispielen und Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Zusammen mit den eingeschobenen Zusammenfassungen und Wiederholungen führt dies dazu, das relativ wenig Raum für die eigentliche Darstellung der Theoretischen Mechanik bleibt. Daher v.a. für Studierende gut geeignet, die die enthaltenen Übungsaufgaben tatsächlich zusätzlich zu den in der Vorlesung gegebenen lösen. Die Reihenfolge der Kapitel ist etwas ungewöhnlich, da Anwendungen wie z.B. das Zentralkraftfeld zwischen die Lagrange-Mechanik und die Hamilton-Mechanik eingeschoben sind. Die Diskussion der Anwendungen ist aber etwas ausführlicher als in anderen Büchern. Enthält ein Kapitel zu relativistischer Mechanik und eines zu chaotischer Dynamik.

- J. L. McCauley, *Classical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997): Ein deutlich tiefer gehendes Lehrbuch als die bisher genannten, das leider nicht in deutscher Übersetzung vorliegt. Legt das Hauptgewicht auf Diskussion (wie Goldstein), ist aber deutlich klarer. Formalismen werden knapp und präzise eingeführt, die Schreibweise verleitet aber dazu, Vektoren und Skalare zu verwechseln. Enthält die Standardkapitel der anderen Bücher, geht aber darüber hinaus. Relativ schwierige Übungsaufgaben ohne Lösungen. Ziemlich umfangreiches Literaturverzeichnis. Relativistische Mechanik wird sehr knapp in einem Kapitel über Elektrodynamik, Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie (!) angerissen. Interessante historische Einführung. Als Zweitbuch für Interessierte zu empfehlen.

Kapitel 2

Kinematik

In diesem Kapitel is unser Ziel die Definition von mathematischen Größen zur *Beschreibung* der Bewegung von *Massenpunkten*. Wir fragen noch nicht nach den Ursachen der Bewegung.

Was ist ein Massenpunkt? Der Massenpunkt ist ein Modell für einen physikalischen Körper in Problemstellungen, in denen es ausreicht, einen Punkt des Körpers zu betrachten, wenn also die Angabe seines *Ortes* ausreicht. Es kommt also darauf an, was wir beschreiben wollen. Bei der Planetenbewegung werden wir z.B. Sonne und Planeten als Massenpunkte beschreiben. Einen gleitenden Block können wir ebenfalls als Massenpunkt beschreiben. Die Körper müssen also nicht klein sein.

Die Bewegung eines Massenpunktes ist charakterisiert durch die *Vektoren*

- Ort $\vec{r}(t)$
- Geschwindigkeit $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$
- Beschleunigung $\vec{a}(t) := \ddot{\vec{r}}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Aus $\vec{r}(t)$ erhält man also sofort $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$, aber oft ist die Aufgabenstellung umgekehrt: $\vec{a}(t)$ ist bekannt und $\vec{r}(t)$ ist gesucht. Wir müssen $\vec{a}(t)$ zweimal integrieren. Bei jeder der beiden Integrationen tritt eine Integrationskonstante auf. Um diese festzulegen, benötigen wir zusätzlich zwei Angaben, z.B. von Ort $\vec{r}(t_0)$ und Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0. Dann ist

- $\vec{a}(t)$ ist gegeben.
- $\vec{v}(t) = \vec{C} + \int\limits_{t_0}^{t} dt'\ \vec{a}(t')$

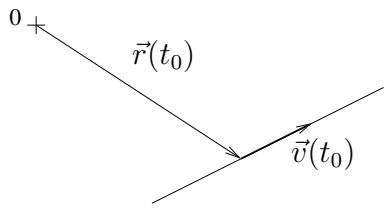
  da $\vec{v}(t = t_0) = \vec{C} + \underbrace{\int\limits_{t_0}^{t} dt'\vec{a}(t')}_{=0}$ folgt

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} dt'\vec{a}(t').} \tag{2.1}$$

- $\vec{r}(t) = \vec{C}' + \int\limits_{t_0}^{t} dt''[\vec{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t''} dt'\ \vec{a}(t')]$, also

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} dt'' \int\limits_{t_0}^{t''} dt'\vec{a}(t').} \tag{2.2}$$

Beispiel: Gleichförmige, geradlinige Bewegung
Hier ist $\vec{a}(t) = 0\ \forall t$. Es folgt $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0)$ und $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0)$.



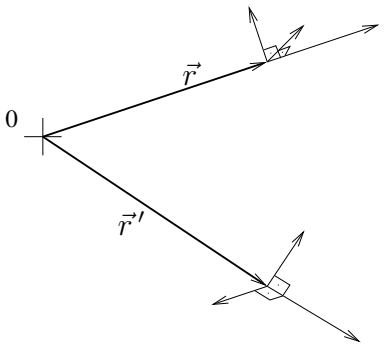
Das ist die Parameterdarstellung einer Geraden. Die unbeschleunigte Bewegung verläuft also geradlinig.

2.1 Koordinatensysteme

(Wiederholung aus der Vorlesung Rechenmethoden)

Wir müssen oft Größen in verschiedenen Koordinatensystemen darstellen, da in geeigneten Koordinatensystemen die Lösung bestimmter Probleme sehr viel einfacher wird. Gewisse Größen sind *invariant* unter Koordinatentransformationen (d.h. sie ändern sich nicht). Diese nennen wir *Skalare*.

Wir verwenden hier nur solche Koordinatensysteme, die an jedem Punkt des Raumes durch drei (oder auch eine andere Anzahl) *orthogonale* Einheitsvektoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ charakterisiert sind („Dreibein“).



Das Dreibein muss nicht an jedem Punkt gleich sein.

Wir ordnen die $\hat{e}_i$ so, dass sie ein Rechtssystem bilden. Dann gilt $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ und $(\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) \cdot \hat{e}_3 = 1$ (Rechtssystem).

An einem Ort $\vec{r}$ drücken wir einen Vektor $\vec{a}$ durch die Einheitsvektoren $\hat{e}_i$ am Ort $\vec{r}$ aus: $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$.

2.1.1 Kartesische Koordinaten

Bei kartesischen Koordinaten ist das Dreibein überall gleich. Wir schreiben auch $\hat{e}_1 = \hat{x}, \hat{e}_2 = \hat{y}, \hat{e}_3 = \hat{z}$.

Die Komponentendarstellung $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$ schreiben wir auch als $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Wenn nichts anderes gesagt ist, meinen wir damit die Komponenten in kartesischen Koordinaten.

Der Gradient lautet dann

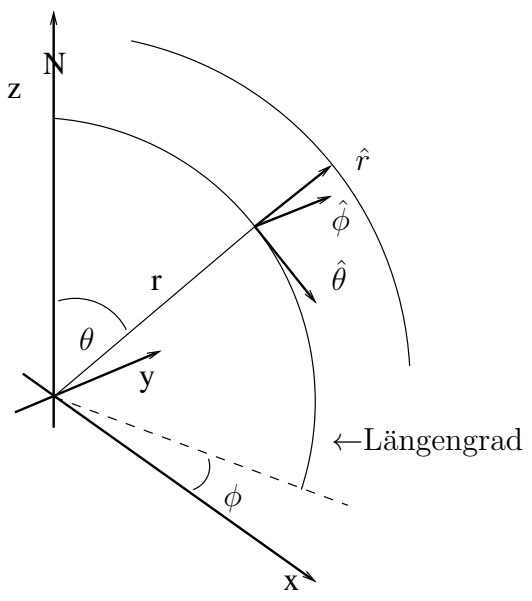
$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \tag{2.3}$$

und das Volumenelement, das wir für Volumenintegrale benötigen,

$$d^3r = dxdydz. \tag{2.4}$$

2.1.2 Kugelkoordinaten

Hier ist das Dreibein vom Ort $\vec{r}$ abhängig.



$\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ bilden ein Rechtssystem. Es ist $\vec{r} = r\hat{r}$ und

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}. \tag{2.5}$$

Daraus folgt sofort

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}. \tag{2.6}$$

Während sich $\vec{v}$ unmittelbar aus $d\vec{r}$ ergibt, ist $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ deutlich komplizierter, weil die Einheitsvektoren $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ von $\vec{r}$ und damit von t abhängen: z.B. $\frac{d}{dt}\hat{r} \neq 0$.

Wir finden

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\dot{\hat{\phi}}. \tag{2.7}$$

Hier ist

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\dot{\vec{v}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \cancel{\frac{\dot{r}}{r}\hat{r}} + \dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} - \cancel{\frac{\dot{r}}{r}\hat{r}} \tag{2.8}$$

und

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\phi}} &= \frac{d}{dt}\frac{\hat{z}\times\hat{r}}{sin\theta} = \frac{\hat{z}\times\dot{\hat{r}}\sin\theta - \hat{z}\times\hat{r}\dot{\theta}\cos\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{\hat{z}\times(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi})}{\sin\theta} - \hat{\phi}\frac{\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta} = \cancel{\hat{\phi}\frac{\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta}} + \dot{\phi}\hat{z}\times\hat{\phi} - \cancel{\hat{\phi}\frac{\dot{\theta}\cos\theta}{\sin\theta}} \\
&= \dot{\phi}(-\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}) = -\sin\theta\dot{\phi}\hat{r} - \cos\theta\dot{\phi}\hat{\theta}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

und schließlich

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt}(\hat{\phi}\times\hat{r}) = \dot{\hat{\phi}}\times\hat{r} + \hat{\phi}\times\dot{\hat{r}} = -\cos\theta\dot{\phi}\hat{\theta}\times\hat{r} + \dot{\theta}\hat{\phi}\times\hat{\theta} = \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\theta}\hat{r}. \tag{2.10}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\hat{r} + (\dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} \\
&\quad + (\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + \dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi})\hat{\phi} \\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\cos\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi})\hat{\phi}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Das ist offenbar ziemlich kompliziert und unanschaulich.

Den Gradienten (Nabla-Operator) schreiben wir als

$$\vec{\nabla} =: \hat{r}\nabla_r + \hat{\theta}\nabla_\theta + \hat{\phi}\nabla_\phi. \tag{2.12}$$

Wichtig: Wir *definieren* die Komponenten $\nabla_r, \nabla_\theta, \nabla_\phi$ so, dass sie *rechts* von den Einheitsvektoren $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ stehen. Das ist *nicht* dasselbe wie $\nabla_r\hat{r} + \nabla_\theta\hat{\theta} + \nabla_\phi\hat{\phi}$, da die $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ vom Ort abhängen.

Nun ist

$$\vec{\nabla} r = (\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}, \ldots, \ldots) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ldots, \ldots) = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r} \tag{2.13}$$

Das ist richtig: $\hat{r}$ ist *definiert* als Einheitsvektor in der Richtung, in der sich r ändert, daher muss $\vec{\nabla} r$ zumindest parallel zu $\hat{r}$ sein. Ebenso sollten $\vec{\nabla}\theta \parallel \hat{\theta}$ und $\vec{\nabla}\phi \parallel \hat{\phi}$ gelten. Das finden wir auch explizit:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\theta &= (\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \ldots, \ldots) = (\frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}, \ldots, \frac{1}{1+\frac{x^2+y^2}{z^2}}\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}) \\
&= \frac{z}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, -\frac{x^2+y^2}{z} = \frac{\hat{\theta}}{r} && (2.14) \\
\vec{\nabla}\phi &= (\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x}, \ldots, 0) = (\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2}), \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}, 0) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x, 0) = \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}. && (2.15)
\end{aligned}$$

Nun gilt nach Kettenregel für jede Funktion f

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{\nabla} r + \frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{\nabla}\theta + \frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{\nabla}\phi = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) f. \tag{2.16}$$

Da dies für jedes f gilt, folgt die Operator-Identität

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{2.17}$$

Für Volumenintegrale brauchen wir das Volumenelement

$$dV = dxdydz = \underbrace{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}}_{\text{Funktional-/Jacobideterminante}} drd\theta d\phi \tag{2.18}$$

mit

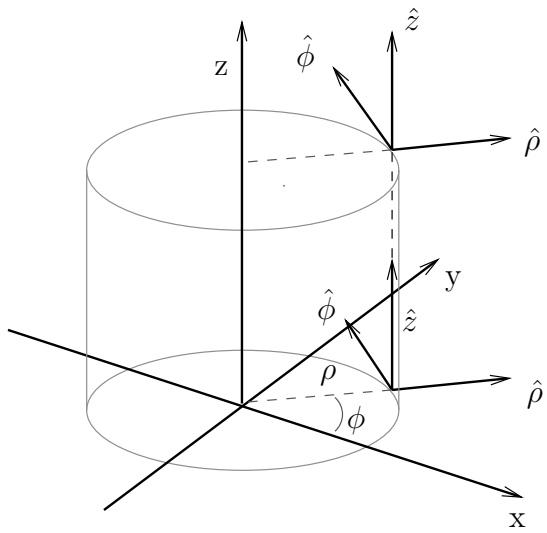
$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi && (2.19) \\
y &= r\sin\theta\sin\phi && (2.20) \\
z &= r\cos\theta && (2.21)
\end{aligned}$$

gilt

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta. \tag{2.22}$$

Es folgt $dV = drd\theta d\phi\ r^2\sin\theta$.

2.1.3 Zylinderkoordinaten



Wir fassen hier nur die Ergebnisse zusammen, die Herleitungen sind analog. Es ist $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$ und $d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$, also

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}. \tag{2.23}$$

Man erhält auch

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} \tag{2.24}$$

und

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.25}$$

und $dV = d\rho d\phi dz\ \rho$. Ebene Polarkoordinaten erhalten wir natürlich einfach durch die Setzung $z = 0$.

2.1.4 Natürliche Koordinaten

Wenn wir die Bewegung eines Massenpunktes beschreiben wollen, bietet es sich manchmal an, an jedem Punkt der Bahnkurve ein der Bahn angepasstes Dreibein zu wählen. Wir definieren zunächst die *Bogenlänge* s als die vom Massenpunkt zwischen den Zeiten t_0 und t zurückgelegte Strecke. s ist der Skalar

$$s = \underbrace{\int_{t_0}^{t} ds(t') \equiv \int_{t_0}^{t} |d\vec{r}(t')|}_{\text{nicht sehr nützlich für Berechnungen}} = \int_{t_0}^{t} dt' \left|\frac{d\vec{r}(t')}{dt}\right|. \tag{2.26}$$

s parametrisiert die Bahnkurve, d.h. jeder Punkt $\vec{r}$ auf der Bahnkurve wird durch einen Wert von s charakterisiert. Dieser Wert von s ist der Abstand entlang der Bahnkurve vom Ausgangspunkt $\vec{r}(t_0)$.

Es gibt nun die folgenden drei ausgezeichneten Richtungen bzw. Einheitsvektoren am Punkt $\vec{r}$:

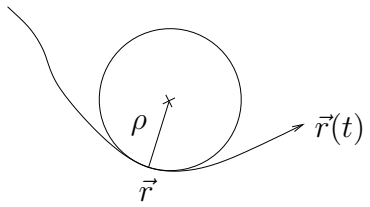
- Tangenteneinheitsvektor $\hat{t}$, ist tangential zur Bahn, also parallel zur Geschwindigkeit und zeigt in dieselbe Richtung (Vereinbarung!). Also gilt

$$\hat{t} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|} \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}}{ds}. \tag{2.27}$$

- Normaleneinheitsvektor $\hat{n}$: $\hat{t}(s)$ ändert sich i.A. entlang der Bahn, eine zweite ausgezeichnete Richtung ist die, in der sich $\hat{t}$ ändert, das ist die Richtung von $d\hat{t}/ds$. (Da $\hat{t}$ Einheitsvektor ist, ist $d\hat{t}/ds \perp \hat{t}$.) Den Normaleneinheitsvektor $\hat{n}$ definieren wir durch Normierung

$$\hat{n} := \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|}. \tag{2.28}$$

  Der Betrag $\left|d\hat{t}/ds\right|$ hat übrigens eine wichtige geometrische Bedeutung: $\kappa := \left|d\hat{t}/ds\right|$ ist die Krümmung und $\rho := 1/\kappa$ ist der Krümmungsradius, d.h. der Radius eines Kreises, der sich am Punkt $\vec{r}$ an die Bahn anschmiegt. Also ist $\hat{n} = \rho\, d\hat{t}/ds$.



- Binormaleneinheitsvektor $\hat{b} := \hat{t} \times \hat{n}$, dann bilden $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ ein rechtshändiges Dreibein. Dieses heißt *begleitendes Dreibein.*

In natürlichen Koordinaten ist $\vec{r}$ nicht einfach auszudrücken, aber $\vec{v}$ und $\vec{a}$ sind es. Es ist nämlich $\vec{v} = v\hat{t}$ (nach Definition). Mit $v = ds/dt$ folgt

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{t} \equiv \dot{s}\hat{t} \tag{2.29}$$

und

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\hat{t} + v\dot{\hat{t}} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}\frac{ds}{dt}\frac{\partial\hat{t}}{\partial s} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}. \tag{2.30}$$

$\vec{a}$ liegt also in der durch $\hat{t}$ und $\hat{n}$ aufgespannten (zu $\hat{b}$ orthogonalen) sogenannten *Schmiegungsebene*. In

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} \tag{2.31}$$

nennen wir a_t die *Tangentialbeschleunigung* und a_n die *Normalenbeschleunigung*, letztere speziell im Fall von Kreisbahnen auch *Zentripetalbeschleunigung*.

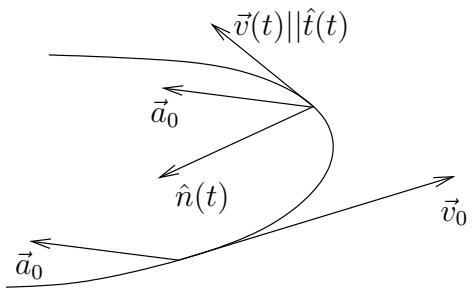
2.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Das ist eine Bewegung mit $\vec{a} = \text{const} \equiv \vec{a}_0$. Dies ergibt offenbar

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}_0(t - t_0) \equiv \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0), \tag{2.32}$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\equiv\vec{r}_0} + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2. \tag{2.33}$$

$\vec{v}(t)$ liegt in der von $\vec{v}_0$ und $\vec{a}_0$ aufgespannten Ebene.



Daher liegt die gesamte Bahnkurve in der Ebene durch den Punkt $\vec{r}_0$, aufgespannt durch $\vec{v}_0$ und $\vec{a}_0$. Der Binormaleneinheitsvektor ist damit konstant und, wie die Skizze zeigt, gegeben durch

$$\hat{b} = \frac{\vec{v}_0 \times \vec{a}_0}{|\vec{v}_0 \times \vec{a}_0|}. \tag{2.34}$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist $\hat{t}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$ und der Normaleneinheitsvektor demnach

$$\hat{n}(t) = \hat{b} \times \hat{t}(t) = \frac{(\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \times \vec{v}}{|\vec{v}_0 \times \vec{a}_0|\, v}. \tag{2.35}$$

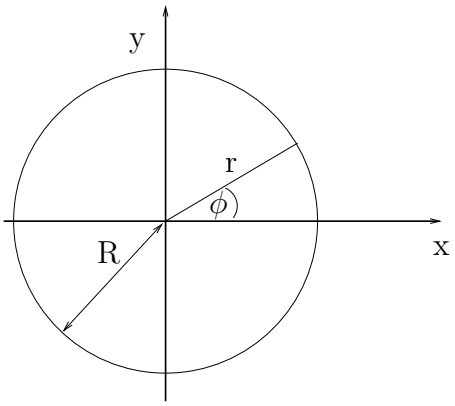
Wir wählen ein Koordinatensystem mit $\hat{z} \perp \vec{v}_0, \vec{a}_0$ und $\hat{y} := \vec{a}_0/a_0$. Dann ist

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0\hat{y}(t - t_0)^2. \tag{2.36}$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, wie erwartet.

2.3 Kreisbewegung

Wenn wir schon wissen, dass die Bahnkurve ein (Teil eines) Kreises ist, können wir $\hat{z} = \hat{b}$ senkrecht zur Bahnebene und de Koordinatenursprung im Kreismittelpunkt wählen.



$$r = |\vec{r}| = const \equiv R \tag{2.37}$$

$$\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{2.38}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{r} + R\ddot{\phi}\hat{\phi}, \tag{2.39}$$

(vgl. Abschnitt 2.1). Hier ist $a_r = -R\dot{\phi}^2$ die *Zentripetalbeschleunigung* und $a_\phi = R\ddot{\phi}$ die *Tangentialbeschleunigung*. Wir definieren noch die *Winkelgeschwindigkeit* $\omega = \dot{\phi}$, dann ist $v = R\omega$, $a_r = -R\omega^2$ und $a_\phi = R\dot{\omega}$. Ist $\omega = \text{const}$, so spricht man von einer gleichförmigen Kreisbewegung.

Man definiert auch die vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} := \omega\hat{z}$. Dann ist $\vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\hat{z} \times r\hat{r} = \omega R\hat{\phi} = \vec{v}$.

Kapitel 3

Newton-Mechanik

Die Ziele dieses Kapitels sind die Formulierung und Motivation der Axiome der Newtonschen Mechanik und ihre Anwendung auf einfache Beispiele.

Jede physikalische Theorie enthält Aussagen, die im Rahmen der Theorie nicht hergeleitet werden können. Diese nennt man die *Axiome* der Theorie. Versuche, die Physik rein deduktiv zu begründen (insbesondere in der mitteralterlichen Scholastik, auf höherem Niveau auch in jüngerer Zeit, z.B. durch Carl Friedrich von Weizsäcker), waren nicht erfolgreich. Die Axiome werden durch den Vergleich der Voraussagen der Theorie mit Experimenten gerechtfertigt. Oft wurden solche Axiome in der Geschichte der Physik im Rahmen einer fundamentaleren Theorie hergeleitet, deren Axiome aber wieder durch Experimente gerechtfertigt werden müssen.

Aus den Axiomen kann man dann Folgerungen ziehen, die den eigentlichen Mehrwert der Theorie darstellen und die man experimentell überprüfen kann.

3.1 Das Trägheitsgesetz

Es ist nicht nur unmöglich, im Rahmen einer bestimmten Theorie alle ihre Aussagen zu beweisen, man kann sie nicht einmal formulieren. Da sich physikalische Theorien auf die reale Welt beziehen, machen sie Aussagen über Kategorien, die nicht innerhalb der Theorie (mathematisch) definiert werden können. In der Newtonschen Mechanik ist eine solche Kategorie die *Kraft*. Wir sehen daher den Begriff der Kraft als durch unsere Sinneserfahrung hinreichend genau definiert an – z.B. beim Heben eines Gewichts. Es ist auch unmittelbar klar, dass die Kraft mit einer *Richtung* behaftet ist, sie ist daher eine vektorielle Größe. Wir definieren zunächst einige Begriffe, um das 1. Newtonsche Axiom formulieren zu können.

Definition: Ein *kräftefreier Körper* ist ein Körper, auf den keine äußeren Käfte wirken.

Definition: Ein *Bezugssystem* ist ein Koordinatensystem im vierdimensionalem Raum, der von den drei realen räumlichen Richtungen und der Zeit aufgespannt wird. Für feste Zeit t ergibt sich ein Koordinatensystem im Realraum, das nicht für alle t dasselbe sein muss.

1. Newtonsches Axiom (Trägheitsgesetz): Es existieren Bezugssysteme, in denen jeder kräftefreie Körper eine geradlinige, gleichförmige Bewegung ausführt. Das schließt die Möglichkeit ein, dass er in Ruhe verharrt.

Definition: Solche Bezugssysteme heißen *Inertialsysteme*.

Also lautet das 1. Axiom kurz: „Es gibt Inertialsysteme“.

3.2 Das Bewegungsgesetz

Wir wissen aus Erfahrung, dass wir eine größere Kraft ausüben müssen, um eine Eisenkugel auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu beschleunigen, als einen gleich großen luftgefüllten Ball. Die beiden Körper setzen ihrer Beschleunigung einen unterschiedlich großen Widerstand entgegen. Als zweite, nicht innerhalb der Mechanik zu definierende Größe führen wir die *träge Masse* m_t als Maß für den Widerstand von Körpern gegen Bewegungsänderungen ein. Die träge Masse hat keinen Richtungssinn und ist daher eine skalare Größe.

Definition: Das Produkt aus träger Masse m_t und Geschwindigkeit $\vec{v}$ heißt *Impuls* $\vec{p} := m_t\vec{v}$.

2. Newtonsches Axiom (Bewegungsgesetz): In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses eines

Körpers pro Zeiteinheit zur angreifenden Kraft proportional und parallel,

$$\vec{F} \sim \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m_t \vec{v}). \tag{3.1}$$

Wir wählen die Maßeinheiten von Kraft und Masse so, dass Gleichheit gilt:

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}. \tag{3.2}$$

Diese Gleichung nennen wir die *Newtonsche Bewegungsgleichung.* Bemerkungen: Ist die Masse konstant, so gilt $\vec{F} = m_t \dot{\vec{v}} = m_t \vec{a}$. Dann ist $\vec{a} = \vec{F}/m_t$. Dies ergibt eine Methode, das Verhältnis von Kraft und träger Masse zu messen, aber nicht eine der beiden Größen für sich allein.

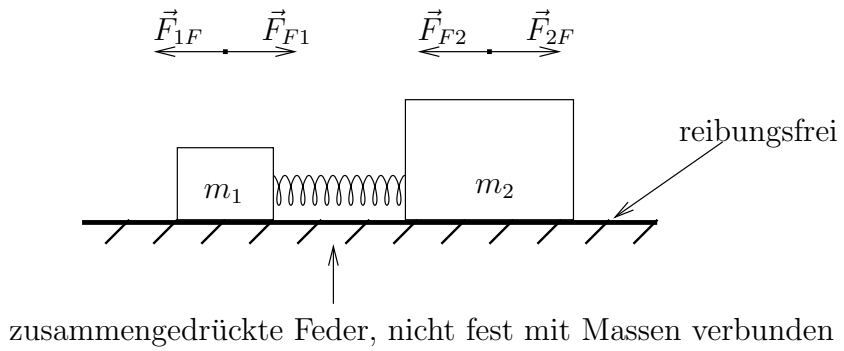
3.3 Das Reaktionsprinzip

Wenn wir auf glattem Boden versuchen, eine schwere Person wegzuschieben, finden wir, dass wir uns überwiegend selbst in die entgegengesetzte Richtung schieben. Offenbar übt die andere Person eine Kraft auf uns aus, ohne selbst etwas zu tun. In quantitativer Form ist das der Inhalt des 3. Axioms:

3. Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip): Die Kraft $\vec{F}_{12}$, die der Körper 2 auf Körper 1 ausübt, und die Kraft $\vec{F}_{21}$ des Körpers 1 auf Körper 2 sind betragsmäßig gleich und entgegengesetzt gerichtet,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \tag{3.3}$$

Folgerung: Wir können nun die träge Masse m_t definieren, nicht nur das Verhältnis $\vec{F}/m_t$. Dazu betrachten wir folgendes Gedankenexperiment:



Wir stauchen die Feder so, dass die Massen in Ruhe sind. Dann gilt

$$-\vec{F}_{1F} = \vec{F}_{F1} = -\vec{F}_{F2} = \vec{F}_{2F} \tag{3.4}$$

($\vec{F}_{1F}$ ist die Kraft, die die Feder auf Masse 1 ausübt usw.). Nach dem 2. Axiom folgt nach dem Loslassen

$$-m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2. \tag{3.5}$$

Für die Beträge folgt $m_1/m_2 = a_2/a_1$.

Damit können wir das Verhältnis einer Probemasse zu einer bekannten Masse über die messbaren Beschleunigungen bestimmen. Dann brauchen wir nur noch eine Referenzmasse, d.h. ein Massennormal, um eine Masseneinheit (das Kilogramm) zu definieren. Damit können wir dann über $\vec{F} = m_t \vec{a}$ auch Kräfte messen und eine Einheit (1 Newton := $1\,\mathrm{kg\,m/s^2}$) festlegen.

3.4 Das Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip ist eigentlich ein zusätzliches Axiom, wie Newton auch bewusst war, wurde von ihm aber nicht als gleichberechtigtes Axiom bezeichnet, vielleicht, weil es selbstverständlich scheint. Die Aussage ist: Wirken zwei oder mehr Kräfte $\vec{F}_i$ auf einen Körper, so ist die gesamte Kraft (die im 2. Axiom auftritt) die vektorielle Summe

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = \sum_i \vec{F}_i. \tag{3.6}$$

3.5 Kraftfelder

Es ist sinnvoll, Kräfte begrifflich von den Körpern, auf die sie wirken, zu trennen.

Definition: Ein *Kraftfeld* $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ ist die Kraft, die an einem Ort $\vec{r}$ zur Zeit t auf einen Testkörper der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ wirken würde.

Das Kraftfeld ist also insbesondere an jedem Punkt definiert, egal ob sich dort ein Massenpunkt befindet. Das macht es zu einem *Feld*. Es kann zusätzlich von der Zeit und der Geschwindigkeit abhängen. Höhere Ableitungen von $\vec{r}$ kommen in fundamentalen Kräften nicht vor und werden daher in der Mechanik meist nicht betrachtet.

3.6 Beispiele für Kräfte

3.6.1 Gewichtskraft

Wir wissen aus Erfahrung, dass die genannte Eisenkugel *schwerer* ist als der gleich große Ball. Das hat zunächst nichts mit ihrer trägen Masse zu tun – die Kugel ist auch schwerer, wenn wir sie nur ohne Beschleunigung halten. Körper haben also eine weitere Eigenschaft, die wir *schwere Masse* m_s nennen, und die für die Eisenkugel größer ist als für den Ball. Wir beobachten, dass auf Körper eine Kraft in der Richtung nach „unten“ wirkt, die umso größer ist, je schwerer der Körper ist. Wir definieren die *schwere Masse* m_s durch

$$\vec{F}_s =: m_s \vec{g}. \tag{3.7}$$

Das ist noch nicht eindeutig, da wir den Betrag von $\vec{g}$ noch nicht definiert haben (die Richtung ist nach „unten“). Nach dem 2. Axiom ist

$$m_t \vec{a} = m_s \vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_t}{m_s} = \frac{|\vec{g}|}{|\vec{a}|} = \frac{g}{a}. \tag{3.8}$$

Nun können wir für irgendeinen Probekörper $g = a$ wählen, dann gilt für diesen Körper $m_t = m_s$. Die zunächst erstaunliche Beobachtung ist, dass dann für *alle* Körper die träge und die schwere Masse übereinstimmen, $m_t = m_s$. Das ist innerhalb der Newton-Mechanik nicht zu begründen. Es folgt aber im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wir lassen daher jetzt den Index „t“ oder „s“ weg. Für einen Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft gilt nun also

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g}. \tag{3.9}$$

Das ist gerade der Fall konstanter Beschleunigung aus Abschnitt 2.2, wir erhalten also als Bahn eine Parabel.

3.6.2 Gravitationskraft

Für einen Körper, dessen Abstand von der Erdoberfläche nicht klein gegenüber dem Erdradius ist (Satellit, Mond) beobachtet man keine konstante Beschleunigung $\vec{g}$. Stattdessen gilt für die Kraft zwischen zwei Massen (z.B. Erde und Satellit) das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{r}.} \tag{3.10}$$

Hier sind
$\vec{r}$: Abstandsvektor ($\vec{r} = r\hat{r}$)
γ: Gravitationskonstante, $\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$ (eine Naturkonstante).

3.6.3 Coulomb-Kraft

Die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 hat eine sehr ähnliche Form, nämlich das *Coulomb-Gesetz*

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}.} \tag{3.11}$$

Die Herleitung wird in der Elektrodynamik-Vorlesung erfolgen. Wichtig: Die Coulomb-Kraft kann anziehend (für $q_1 q_2 < 0$) oder abstoßend (für $q_1 q_2 > 0$) sein. Bemerkung: Dass Gravitations- und Coulomb-Kraft dieselbe $1/r^2$-Form haben, liegt letztlich daran, dass beide durch masselose Teilchen vermittelt werden.

Gravitations- und Coulomb-Kraft sind Beispiele für *Zentralkräfte*. Das sind alle Kräfte der allgemeinen Form

$$\vec{F} = \underbrace{f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{\text{Skalar}} \hat{r} \quad \leftarrow \text{Richtung} \parallel \hat{r}. \tag{3.12}$$

3.6.4 Lorentz-Kraft

Auf eine Ladung q in einem allgemeinen elektromagnetischen Feld wirkt die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \tag{3.13}$$

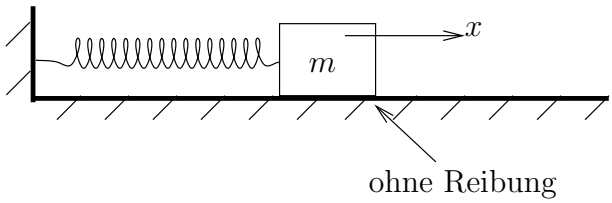
mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}$, oder ausführlicher

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\vec{E}(\vec{r}, t) + q\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t). \tag{3.14}$$

Das ist das wichtigste Beispiel für eine geschwindigkeitsabhängige Kraft.

3.6.5 Federkraft

Für eine Feder gilt näherungsweise das *Hookesche Gesetz* $F = -kx$ (in einer Dimension).



Die Kraft ist proportional zur Auslenkung und entgegengesetzt gerichtet. Dieses Kraftgesetz beschreibt den *harmonischen Oszillator*. Wir werden später in dieser Vorlesung und auch in der Quantenmechanik sehen, dass der harmonische Oszillator weitaus wichtiger ist, als man vermuten könnte. Der Grund ist, dass sich fast jedes System gegenüber *kleinen* Auslenkungen aus dem Gleichgewicht wie ein harmonischer Oszillator verhält.

3.6.6 Reibungskräfte

Das sind Kräfte, die der Bewegung eines Körpers entgegen wirken und also seiner Geschwindigkeit gegenüber dem Medium bzw. der Unterlage entgegen gerichtet sind. Ihre Herleitung aus fundamentalen Kräften ist schwierig. Man findet *näherungsweise* folgende Formen:

- Gleitreibung: $\vec{F} = -\mu_G F_\perp \hat{v}$ mit $\hat{v} := \vec{v}/|\vec{v}|$. $F_\perp$ ist die Normalkraft, d.h. die Kraft zwischen dem Körper und der Unterlage. Beispiel: Auto mit blockierenden Bremsen. Rollreibung hat dieselbe Form mit einem kleineren Koeffizienten μ_R.
- Stokesche Reibung: $\vec{F} = -\alpha\vec{v} \equiv -\alpha v\hat{v}$. Beispiel: langsame Bewegung in einer Flüssigkeit oder einem Gas.
- Newtonsche Reibung: $\vec{F} = -\alpha v^2\hat{v}$. Beispiel: schnelle Bewegung in einer Flüssigkeit oder einem Gas, wobei Turbulenz auftritt.

3.7 Wechsel des Bezugssystems

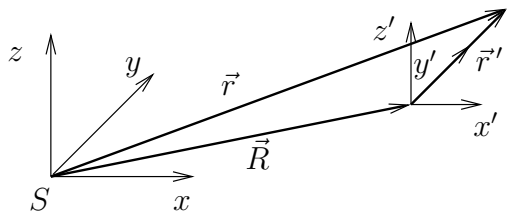
Das 1. Axiom postuliert die Existenz von Inertialsystemen, also von Bezugssystemen, in denen für kräftefreie Körper $\vec{v} = \text{const}$ gilt, also $m\vec{a} = 0$. Wir wollen nun *alle* Inertialsysteme finden.

Transformationen, die nur die räumlichen Koordinaten betreffen, sind hierbei langweilig, denn sie ändern weder die Gestalt der Gleichung $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$, noch die Form der Bahnkurve. Wir können daher kartesische räumliche Koordinaten zu jedem Zeitpunkt t annehmen. Dann kann ein Bezugssystem S' aus einem anderen, S, durch beliebige, zeitabhängige Kombinationen von Translationen und Rotationen hervorgehen. Wir beschränken uns hier auf reine Translationen und reine Rotationen, ohne dadurch wirklich etwas zu verlieren.

3.7.1 Translationen

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass zwei Bezugssysteme S, S' zur Zeit $t = 0$ identisch sind. S sei ein Inertialsystem, d.h. ohne äußere Kräfte gelte $m\ddot{\vec{r}} = 0$. S' gehe aus S durch eine zeitabhängige Translation $\vec{R}(t)$ hervor. (Nach Voraussetzung ist $\vec{R}(0) = 0$.) S' ist genau dann auch ein Inertialsystem, wenn für Koordinaten $\vec{r}'$ in S' ebenfalls $m\ddot{\vec{r}}' = 0$ gilt. Nun ist

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{3.15}$$



Es folgt $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}'$ und damit $m\ddot{\vec{r}}' = \cancel{m\ddot{\vec{r}}} - m\ddot{\vec{R}}$. Dies ist genau dann gleich Null, wenn $\ddot{\vec{R}} = 0$, also $\dot{\vec{R}} = \vec{V} = \text{const}$ und $\vec{R} = \vec{V}t$.

Also: Durch Translation erhält man genau dann wieder ein Inertialsystem, wenn S' sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem S bewegt. Für die räumlichen Koordinaten gilt dann

$$\vec{r} = \vec{V}t + \vec{r}'. \tag{3.16}$$

Mit der zeitlichen Koordinate haben wir überhaupt nichts gemacht, also gilt

$$t = t'. \tag{3.17}$$

Zusammen bilden diese Abbildungen eine *Galilei-Transformation*. Wir werden sehen, dass Rotationen keine zusätzlichen Inertialsysteme erzeugen, also sind die Galilei-Transformationen die *allgemeinsten* Transformationen, die Inertialsysteme ineinander überführen.

Wirkt eine Kraft, so gilt in S (2. Axiom)

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}. \tag{3.18}$$

Nach der Galilei-Transformation ist $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$, also $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$ und $m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}}$. Das 2. Axiom behält also seine Form bei, wenn wir einfach $\vec{F}' = \vec{F}$ setzen. Die Kraft ändert sich unter Galilei-Transformation nicht. Wir müssen aber $\vec{F}'$ durch die transformierten $\vec{r}', \dot{\vec{r}}'$ ausdrücken, falls die Kraft $\vec{F}$ von $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ abhängt. Bei einer *beliebigen* Translation von S' relativ zu S gilt

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \tag{3.19}$$

und damit

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} + m\ddot{\vec{r}}'. \tag{3.20}$$

Im Inertialsystem gilt $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$. Wir wollen die Kraft $\vec{F}'$ in S' so definieren, dass auch in S' gilt $\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}'$. Es folgt

$$\vec{F}' = m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}}. \tag{3.21}$$

Wir können die Newtonsche Bewegungsgleichung auch in S' verwenden, wenn wir zur Kraft eine *Scheinkraft* $-m\ddot{\vec{R}}$ addieren. Sie heißt Scheinkraft, weil sie nicht auf fundamentalen Kräften beruht, sondern nur auf der Wahl eines komplizierten Bezugssystems. Scheinkräfte haben sehr wohl fühlbare Auswirkungen. Beispiel: Bewegung in einem ICE bei Notbremsung.

3.7.2 Rotationen

Die Systeme S und S' sollen für $t = 0$ zusammenfallen. Ihre Koordinatenursprungspunkte sollen für alle t zusammenfallen. Dann führt S' gegenüber S eine allgemeine Rotation aus. S sei durch ein Dreibein $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ charakterisiert, S' durch ein Dreibein $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$. Der interessante Fall ist natürlich der, dass das Dreibein $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ von der Zeit abhängt. Über die Zeitabhängigkeit des Dreibeins $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ nehmen wir nichts an, wir können uns aber vorstellen, dass es zeitlich konstant ist.

Wir können einen Ortsvektor $\vec{r}$ in S oder S' darstellen:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{3} r'_i \hat{e}'_i. \tag{3.22}$$

Für einen Beobachter in S ist die Geschwindigkeit

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \hat{e}_i = \sum_i (\dot{r}'_i \hat{e}'_i + r'_i \dot{\hat{e}}'_i), \tag{3.23}$$

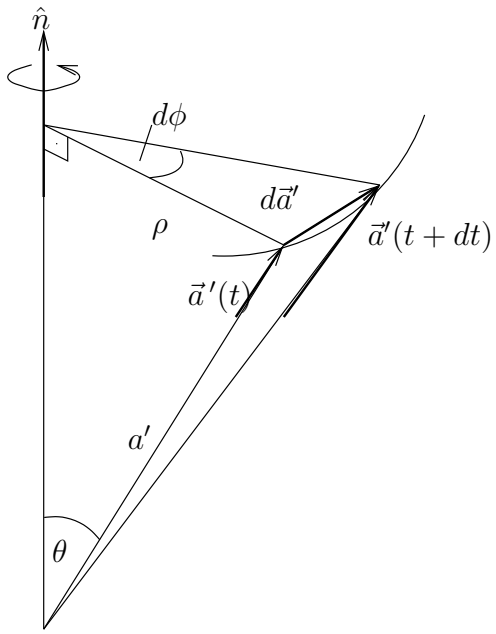
für einen in S' mitrotierenden Beobachter dagegen

$$\dot{\vec{r}}' = \sum_i \dot{r}'_i \hat{e}'_i \tag{3.24}$$

(der Beobachter rotiert mit, also ändern sich die $\hat{e}'_i$ nicht mit der Zeit). Es folgt

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \sum_i r'_i \dot{\hat{e}}'_i. \tag{3.25}$$

Als nächstes vollen wir herausfinden, wie sich die Einheitsvektoren $\hat{e}'_i$ aus Sicht von S ändern. Wir können zu jedem Zeitpunkt die Rotation von S' als Rotation mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine momentane Drehachse entlang $\hat{n}$ beschrieben. ω und $\hat{n}$ sind i.A. zeitabhängig. Wir untersuchen nun, wie sich ein in S' fester Vektor $\vec{a}'$ (z.B. $\hat{e}'_i$) im Zeitinterval $[t, t+dt]$ aus Sicht von S ändert.



Es gilt $\rho = a' \sin\theta$ und $da' = \rho d\phi = \rho\omega dt$, daher

$$da' = a'\omega dt \sin\theta. \tag{3.26}$$

(Hinweis: Wir nehmen nicht Bezug auf ein bestimmtes räumliches Koordinatensystem. $d\vec{a}'$ soll *nicht* die Änderung von $\vec{a}'$ in S' darstellen, die natürlich veschwindet. Der Strich soll vielmehr andeuten, dass $\vec{a}'$ in S' fest ist.) Weiterhin steht $d\vec{a}'$ senkrecht auf $\hat{n}$ und $\vec{a}'$, und $\hat{n}, \vec{a}', d\vec{a}'$ bilden ein Rechtssystem. Es folgt

$$d\vec{a}' = \text{const}\, \hat{n} \times \vec{a}' \tag{3.27}$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{a}' = \text{const}\, |\hat{n} \times \vec{a}'| = \text{const}\, \overbrace{|\hat{n}|}^{=1} a' \sin\theta. \tag{3.28}$$

Zusammen ergibt sich const $= \omega\, dt$ und

$$d\vec{a}' = \omega\, dt\, \hat{n} \times \vec{a}'. \tag{3.29}$$

Wir verwenden den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} := \omega\hat{n}$:

$$d\vec{a}' = \omega \times \vec{a}' dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{a}'}{dt} = \omega \times \vec{a}'. \tag{3.30}$$

Das gilt für jeden in S' festen Vektor, insbesondere also für $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$. Damit wird

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}' + \sum_i r'_i \vec{\omega} \times \hat{e}'_i \\ &= \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \sum_i r'_i \hat{e}'_i = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Das können wir als allgemeine Transformation formulieren:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{Ableitung aus Sicht von S}} = \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)'}_{\text{Ableitung aus Sicht von S'}} + \vec{\omega} \times} \tag{3.32}$$

(angewendet auf einen beliebigen Vektor).

Nochmals auf Gleichung (3.31) angewendet ergibt dies

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}' + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\vec{r}' \\ &= \ddot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \vec{F}' &= m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \vec{F} \underbrace{- m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{tritt nur für beschleunigte Rotationen auf}} \\ &\quad \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{=:\vec{F}'_C} \\ &\quad \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{=:\vec{F}'_Z}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Corioliskraft $\vec{F}'_C$ und *Zentrifugalkraft* $\vec{F}'_Z$ treten auch bei gleichmäßiger Rotation auf. Die Scheinkräfte sind gerade so beschaffen, dass die Bewegung in S' so kompliziert ist, dass in einem Inertialsystem S die Bewegung im kräftefreien Fall gleichförmig verläuft.

Beispiel: Ein kräftefreier Massenpunkt ruhe bei $\vec{r}$ im Inertialsystem S. Wie lautet die Scheinkraft in einem gleichmäßig rotierenden Bezugssystem S'?

$$\vec{F}' = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \tag{3.35}$$

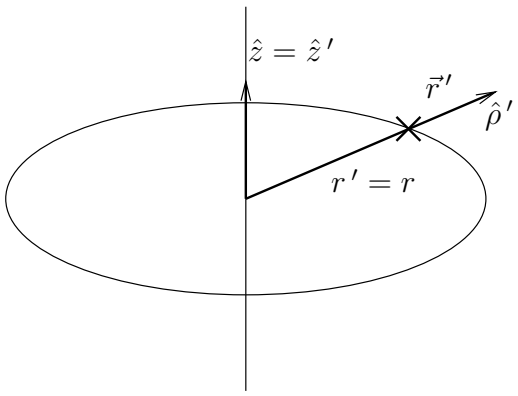
$$\dot{\vec{r}}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}' \tag{3.36}$$

(aus Sicht von S' bewegt sich der Massenpunkt in der entgegengesetzten Richtung im Vergleich zur Rotation von S' relativ zu S). Es folgt

$$\begin{aligned}\vec{F}' &= 2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten mit der z- (und z'-) Achse entlang $\vec{\omega}$. Dann ist

$$\vec{F}' = -m\omega^2 r' \hat{\rho}' = -m\omega^2 r \hat{\rho}'. \tag{3.38}$$



Man beachte, dass die Zentrifugalkraft nach außen wirkt, aber von der doppelt so großen Coriolis-Kraft überkompensiert wird. Das Ergebnis ist mit der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}' = -\omega^2 r\hat{\rho}'$ aus Abschnitt 2.2 kompatibel.

3.8 Die Newtonsche Bewegungsgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt ist von der Form $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, sofern die Masse konstant ist, egal wie das Kraftfeld aussieht und ob das Bezugssystem ein Inertialsystem ist oder nicht. Dies ist ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen 2.Ordnung: In kartesischen Koordinaten ist

$$m\ddot{x}_i - F_i(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{3.39}$$

für $i = 1, 2, 3$.

Die allgemeine Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sagt aus, dass jede Differentialgleichung n-ter Ordnung, $f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \ldots, \dot{x}, x, t) = 0$, eine *Schar* $x = x(t; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ von Lösungen hat, die von n unabhängigen Parametern abhängen. Für gegebene Parameter $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ erhält man eine spezielle (partikuläre) Lösung. Oft kann man diese Parameter durch Angabe von n Anfangsbedingungen $x^{(n)}(t_0)$, $x^{(n-1)}(t_0)$, ..., $x(t_0)$ festlegen. Dies gilt alles auch für vektorwertige Funktionen $\vec{r}(t)$, wobei dann die Parameter $\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_n$ ebenfalls Vektoren sind.

Das bisher gesagte ist nicht ganz richtig: Ist $f(x^{(n)}, \ldots, x, t)$ nicht in allen $x^{(n)}, \ldots, x$ linear, so spricht man von einer *nichtlinearen* Differentialgleichung. In diesem Fall ist die spezielle Lösung nicht immer durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt. Beispiel:

$$\dot{x} = \alpha\sqrt{|x|}, \qquad \alpha > 0. \tag{3.40}$$

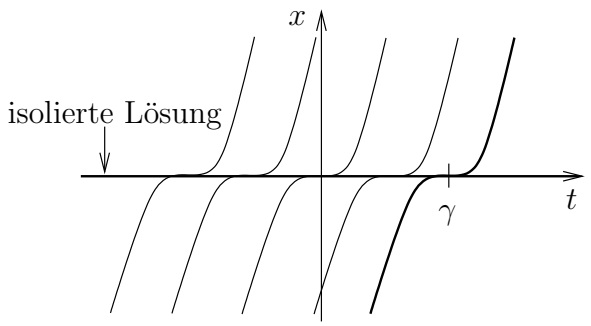
Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = \alpha^2 \frac{\operatorname{sgn}(t-\gamma)}{4}\,(t-\gamma)^2 \quad \text{mit} \quad \operatorname{sgn} a := \begin{cases} +1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

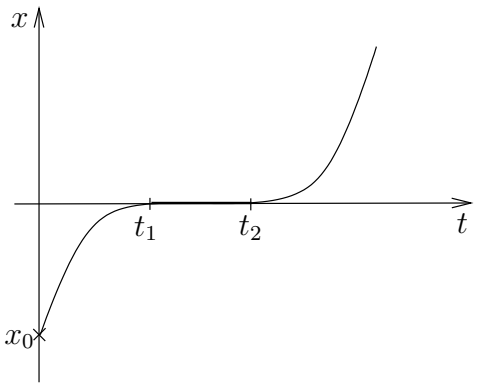
wegen

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha^2 \operatorname{sgn}(t-\gamma)}{2}\,(t-\gamma) = \frac{\alpha^2}{2}\,|t-\gamma| = \alpha\sqrt{|x|}. \tag{3.42}$$

Aber es gibt zusätzlich die *isolierte* Lösungen $x(t) \equiv 0$, die nicht in der Schar (3.41) enhalten ist.



Geben wir nun z.B. $x(0) = x_0 < 0$ vor, so sind folgende Lösungen damit kompatibel:



$$x(t) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{4}(t-t_1)^2 & \text{für } t < t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 \le t \le t_2 \\ \frac{\alpha^2}{4}(t-t_2)^2 & \text{für } t > t_2 \end{cases} \tag{3.43}$$

mit

$$x(0) = -\frac{\alpha^2}{4}(0-t_1)^2 = -\frac{\alpha^2}{4}t_1^2 \stackrel{!}{=} x_0 \tag{3.44}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{2}{\alpha}\sqrt{-x_0} \tag{3.45}$$

(beachte $x_0 < 0$). Aber t_2 kann beliebig t_1 gewählt werden, solange $t_2 \ge t_1$. Ein analoges Problem tritt bei der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = \beta\sqrt{|x|} \tag{3.46}$$

auf, die eigentlich harmlos aussieht. In praktisch vorkommenden Fällen scheint dies aber nicht aufzutreten.

Besonders wichtig für uns sind aber *lineare* Differentialgleichungen. Diese haben die Form

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t)\, x^{(j)} = \beta(t). \tag{3.47}$$

Man beachte, dass die Koeffizienten α_j und die Inhomogenität β von t abhängen können. Ist $\beta \equiv 0$, so heißt die Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*. Für homogene lineare Differentialgleichung gilt das Superpositionsprinzip: Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen, so ist es auch $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ mit beliebigen Konstanten c_1, c_2. m Lösungen $x_j(t)$ heißen *linear unabhängig*, wenn $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(t) = 0$ nur durch $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ erfüllt werden kann (analog zu Vektoren).

Für homogene lineare Differentialgleichung können wird die Parameter $\gamma_j, j = 1, \ldots, n$ als Koeffizienten einer Darstellung durch n unabhängige Lösungen wählen:

$$x(t; \gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j(t). \tag{3.48}$$

Kennt man also n unabhängige Lösungen, so hat man schon die allgemeine Lösung.

Für die *inhomogene* lineare Differentialgleichung

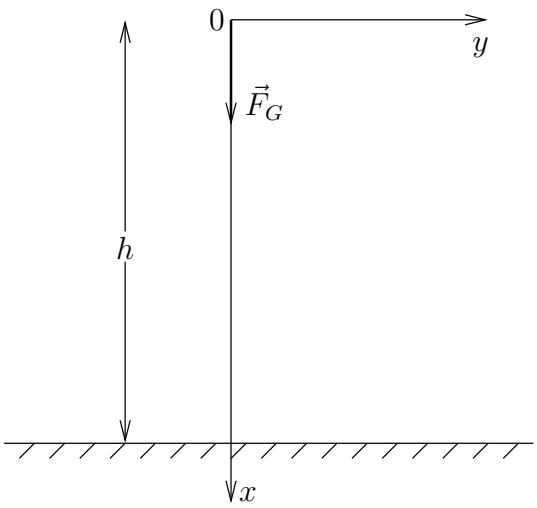
$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t) x^{(j)} = \beta(t) \tag{3.49}$$

sei $x_{\text{spz}}(t)$ eine spezielle Lösung. Sei $x_{\text{hom}}(t; \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t) x^{(j)} = 0$. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t)(x_{\text{spz}} + x_{\text{hom}})^{(j)} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t) x_{\text{spz}}^{(j)}}_{=\beta(t)} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \alpha_j(t) x_{\text{hom}}^{(j)}}_{=0} = \beta(t) \tag{3.50}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Da $x_{\text{spz}}(t) + x_{\text{hom}}(t; \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ bereits von n unabhängigen Parametern γ_j abhängt, ist es sogar die allgemeine Lösung. Wir brauchen für die Lösung also die allgemeine lösung der homogenen Gleichung und nur *eine* spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beispiel: freier Fall unter Einfluss der Luftreibung. Dies ist ein eindimensionales Problem, wir wählen die Koordinate x nach *unten*.



Es wirken die Gewichtskraft $\vec{F}_G = mg\hat{x}$ und die *Stokesche* Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{x}\hat{x}$. Die Bewegungsgleichung (2. Axiom) lautet

$$m\ddot{x}\hat{x} = mg\hat{x} - \alpha\dot{x}\hat{x}, \tag{3.51}$$

also $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + mg$ und damit

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = mg. \tag{3.52}$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Aber x selbst tritt gar nicht auf, also ist es auch eine lineare, inhomogene Differentialgleichung *1. Ordnung* für $\dot{x}$.

(a) Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$m\ddot{x}_{\text{hom}} + \alpha\dot{x}_{\text{hom}} = 0. \tag{3.53}$$

Ansatz: $\dot{x}_{\text{hom}} = \gamma_1 e^{ct}$ (γ_1, c sind unbekannte Konstanten). Einsetzen ergibt

$$-m\gamma_1 c e^{-ct} + \alpha\gamma_1 e^{-ct} = 0 \quad \Rightarrow \quad -mc + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\alpha}{m}. \tag{3.54}$$

Also ist $\dot{x}_{\text{hom}} = \gamma_1 e^{-\alpha t/m}$ eine Lösung für alle γ_1. Da dies *einen* Parameter (γ_1) enthält, ist es bereits die allgemeine Lösung.

(b) Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: Ansatz: $x_{\text{spz}} = \text{const} =: v_0$. Einsetzen ergibt

$$0 + \alpha v_0 = mg \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{mg}{\alpha}. \tag{3.55}$$

(c) Allgemeine Lösung: Es folgt

$$\dot{x}(t) = \gamma_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}g. \tag{3.56}$$

Um $x(t)$ zu finden, müssen wir nochmals integrieren:

$$x(t) = \gamma_2 - \gamma_1 \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha}gt. \tag{3.57}$$

Dies enthält 2 Parameter, ist also tatsächlich die allgemeine Lösung. Wir brauchen zwei Anfangsbedingungen, um die Lösung eindeutig festzulegen. Sei $x(0) = 0$ (Skizze!) und $\dot{x}(0) = 0$ (Start in Ruhe). Dann folgt

$$0 = x(0) = \gamma_2 - \gamma_1 \frac{m}{\alpha}, \tag{3.58}$$

$$0 = \dot{x}(0) = \gamma_1 + \frac{m}{\alpha}g \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -\frac{m}{\alpha}g \tag{3.59}$$

$$\tag{3.60}$$

und schließlich

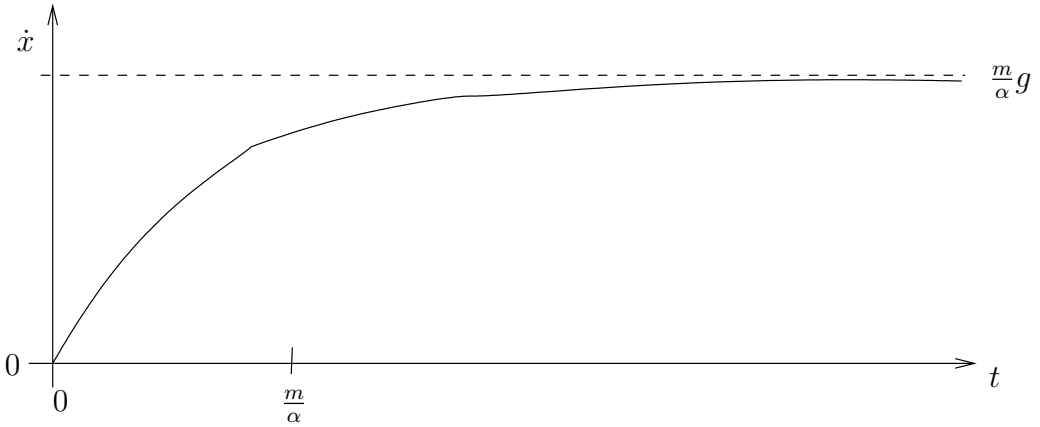
$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{m}{\alpha} = -\frac{m^2}{\alpha^2} g. \tag{3.61}$$

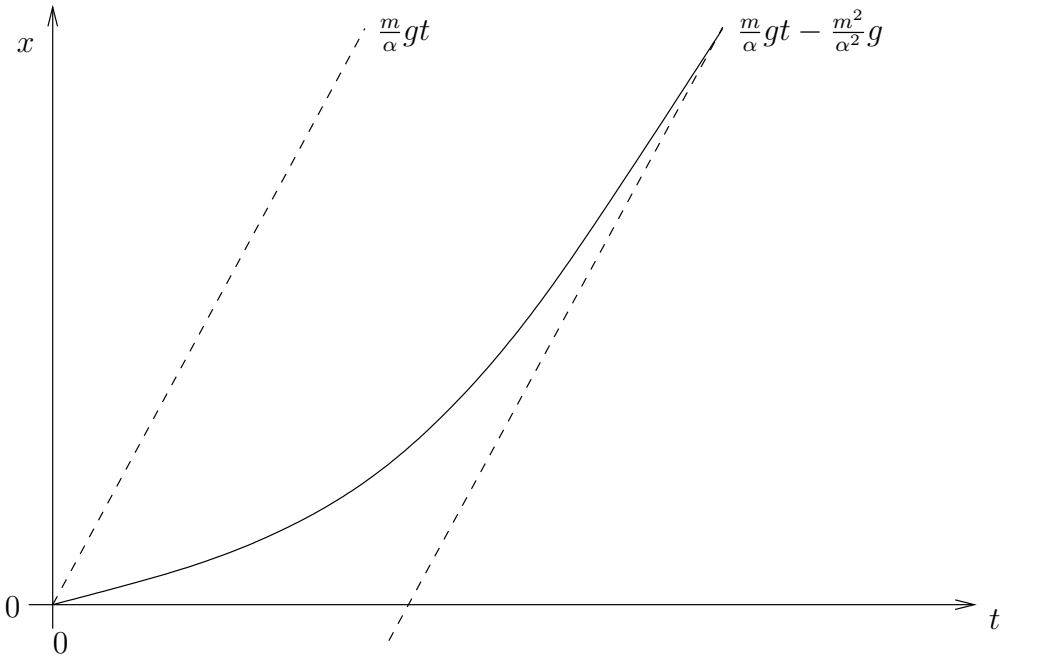
Also erhalten wir die spezielle Lösung

$$x(t) = -\frac{m^2}{\alpha^2} g + \frac{m^2}{\alpha^2} g e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{m}{\alpha} g t = \frac{m}{\alpha} g t - \frac{m^2}{\alpha^2} g (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) \tag{3.62}$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = \frac{m}{\alpha} g - \frac{m}{\alpha} g e^{-\frac{\alpha}{m}t} = \underbrace{\frac{m}{\alpha} g}_{=:\, v_G \text{ (Grenzgeschwindigkeit)}} (1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}). \tag{3.63}$$

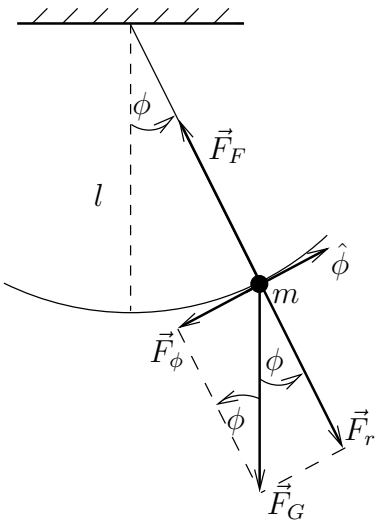




Der Körper erreicht also nach einer Zeit von der Größenordnung m/α asymptotisch die Grenzgeschwindigkeit $v_G = mg/\alpha$. Für einen Fallschirmspringer sind das, vor dem Öffnen des Fallschirms, ungefähr 200 km/h.

3.9 Der harmonische Oszillator

Für ein Fadenpendel mit vernachlässigbarer Masse des Fadens wirkt die resultierende Kraft in rein tangentialer Richtung. Der radiale Anteil $\vec{F}_r$ der Gewichtskraft wird nämlich genau von der Fadenspannung $\vec{F}_F$ kompensiert – ansonsten würde der Massenpunkt ja in radialer Richtung beschleunigt werden.



Die rücktreibende Kraft ist also (Skizze!)

$$\vec{F}_\phi = -F_G \sin\phi\hat{\phi} = -mg\sin\phi\hat{\phi}. \tag{3.64}$$

Die Beschleunigung hat auch nur einen ϕ-Anteil $a_\phi\hat{\phi} = r\ddot{\phi}\hat{\phi} = l\ddot{\phi}\hat{\phi}$. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$ml\ddot{\phi} = -mg\sin\phi \tag{3.65}$$

$$\Rightarrow \quad l\ddot{\phi} = -g\sin\phi. \tag{3.66}$$

Wir sehen, dass die Masse irrelevant ist. Die Differentialgleichung

$$l\ddot{\phi} + g\sin\phi = 0 \tag{3.67}$$

ist von 2. Ordnung, aber *nicht linear*, da sie $\sin\phi$ enthält. Die exakte Lösung erfordert spezielle Funktionen (elliptische Integrale). Für kleine Auslenkungen ist jedoch $\sin\phi \cong \phi$ und wir erhalten die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$l\ddot{\phi} + g\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\phi. \tag{3.68}$$

Wir verwenden einen Lösungsansatz mit *komplexen Zahlen*, der eine besonders kompakte Darstellung gestattet. Komplexe Zahlen treten hier ganz natürlich auf: Die Gleichung $\ddot{\phi} = -(g/l)\phi$ erfordert eine Funktion ϕ, die zu ihrer eigenen 2. Ableitung proportional ist. Ein naheliegender Ansatz ist die Exponentialfunktion

$$\phi(t) = \phi_0 e^{ct} \tag{3.69}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\phi} = \phi_0 c^2 e^{ct}, \tag{3.70}$$

also

$$\phi_0 c^2 e^{ct} = -\frac{g}{l}\phi_0 e^{ct} \quad \Rightarrow \quad c^2 = -\frac{g}{l} < 0. \tag{3.71}$$

Der Ansatz ist also erfolgreich, aber nur, wenn c die Wurzel aus einer negativen Größe ist. Die Lösungen sind

$$c = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{mit} \quad i = \sqrt{-1}. \tag{3.72}$$

Da die Differentialgleichung linear ist, gilt das Superpositionsprinzip und die allgemeine Lösung (zwei Parameter!) ist

$$\phi(t) = \gamma_1 e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \gamma_2 e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}. \tag{3.73}$$

Das ist sicherlich keine Lösung des *physikalischen* Problems, denn der Winkel ϕ muss reel sein. Was haben wir also gewonnen? Wir können aus den zwei unabhängigen komplexen Lösungen $e^{\pm i\sqrt{g/l}\,t}$ zwei unabhängige *reelle* Lösungen konstruieren, die damit physikalisch sinnvoll sind: Zum einen

$$\frac{e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{2} = \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{3.74}$$

und zum anderen

$$\frac{e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{2i} = \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t. \tag{3.75}$$

Damit ist die allgemeine reelle Lösung

$$\phi(t) = \gamma_1' \cos\omega t + \gamma_2' \sin\omega t \tag{3.76}$$

mit $\omega := \sqrt{g/l}$. Man kann die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus verwenden, um zu zeigen, dass die allgemeine Lösung auch als

$$\phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \beta) \tag{3.77}$$

mit den beiden Parametern ϕ_0 und β geschrieben werden kann.

Wie bekannt, erhalten wir eine Lösung derselben Form für das *Feder*pendel mit der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -kx$, wobei dann die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ beträgt.

3.9.1 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Das Federpendel mit Stokesscher Reibung hat die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx$, also

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0, \tag{3.78}$$

eine homogene lineare Gleichung. Ansatz: $x(t) = x_0 e^{ct}$ wie zuvor. Einsetzen ergibt

$$mc^2 + \alpha c + k = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 + \frac{\alpha}{m}c + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}. \tag{3.79}$$

Für $\alpha = 0$ (keine Reibung) schreiben wir

$$c = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} =: \pm i\omega_0. \tag{3.80}$$

Wir definieren außerdem $\beta := \alpha/2m$. Dann gilt für beliebige $\alpha > 0$ (oder äquivalent $\beta > 0$)

$$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \tag{3.81}$$

Offenbar erhalten wir wesentlich verschiedene Lösungen je nach dem Vorzeichen von $\beta^2 - \omega_0^2$. Wir machen daher eine Fallunterscheidung:

(a) $\beta < \omega_0$ (Schwingfall):

$$c = -\beta \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}_{\text{reell}} =: -\beta \pm i\omega \tag{3.82}$$

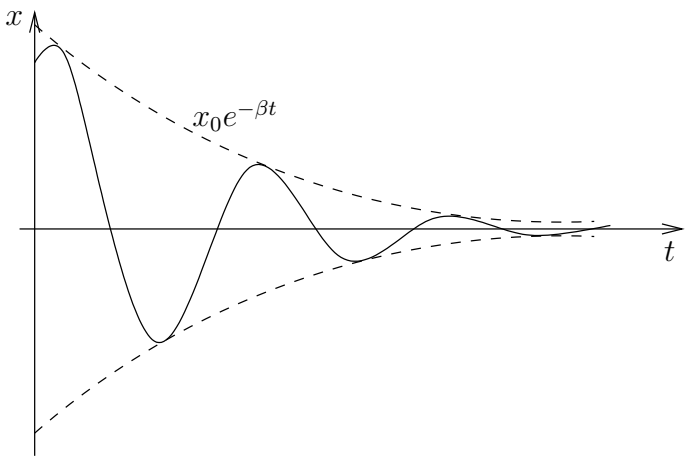
$$\Rightarrow \quad x = x_0 e^{ct} = x_0 e^{-\beta t} e^{\pm i\omega t}. \tag{3.83}$$

Die allgemeine komplexe Lösung ist

$$x = e^{-\beta t}(x_1 e^{i\omega t} + x_2 e^{-i\omega t}). \tag{3.84}$$

Die allgemeine reelle Lösung ist, analog zur ungedämpften Schwingung,

$$x = e^{-\beta t}(x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t) = x_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \phi). \tag{3.85}$$



(b) $\beta > \omega_0$ (Kriechfall):

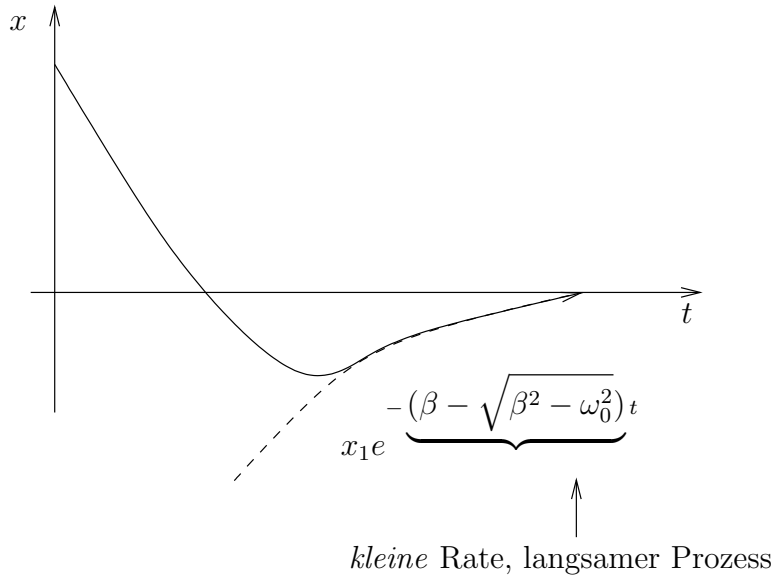
$$c = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{\text{reell}} \tag{3.86}$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 e^{-(\beta \mp \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}. \tag{3.87}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x = x_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + x_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}. \tag{3.88}$$

Das ist eine Überlagerung von zwei exponentiellen Zerfällen mit Zerfallsraten $\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.



(c) $\beta = \omega_0$ (Aperiodischer Grenzfall):

$$c = -\beta \quad \Rightarrow \quad x = x_0 e^{-\beta t}. \tag{3.89}$$

Wir erhalten nur eine Lösung. Die allgemeine Lösung muss aber die Superposition von zwei Lösungen sein. Wie bekommen wir die zweite? Wir betrachten die Differentialgleichung für diesen Fall:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.90}$$

mit $\beta = \omega_0$, also

$$\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{3.91}$$

Wir gehen nun vom Fall (b), $\beta > \omega_0$, aus und führen den Grenzübergang $\beta \to \omega_0$ aus. Die beiden unabhängigen Lösungen sind

$$e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} \quad \text{und} \quad e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}. \tag{3.92}$$

Wir können aber zwei beliebige, unabhängige Linearkombinationen von diesen als unabhängige Lösungen wählen, z.B.

$$e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} \quad \text{und} \quad \frac{e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} - e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}. \tag{3.93}$$

Nun sei $\beta \to \omega_0$, dann werden diese Lösungen zu

$$e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} \quad \to \quad e^{-\omega_0 t}, \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} - e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} &= e^{-\beta t}\frac{e^{\overbrace{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}^{\text{klein}}} - e^{-\overbrace{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}^{\text{klein}}}}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \\ &\cong e^{-\beta t}\frac{\cancel{1} + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t - \cancel{1} + \sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} = te^{-\beta t} = te^{-\omega_0 t}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Das ist eine zweite unabhängige Lösung für $\beta = \omega_0$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$x = (x_0 + v_0 t)\, e^{-\omega_0 t}. \tag{3.96}$$

Der Graph von $x(t)$ unterscheidet sich qualitativ nicht von Fall (b).

3.9.2 Getriebener harmonischer Oszillator

Wirkt eine zeitabhängige äußere Kraft $F(t)$ auf das gedämpfte Federpendel, so lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}. \tag{3.97}$$

Diese Differentialgleichung ist inhomogen. Die allgemeine Lösung ist die bekannte allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Nun sind alle Lösungen der homogenen Gleichung für $\beta > 0$ gedämpft und verschwinden daher für große Zeiten t. Nach einem „Einschwingvorgang“ bleibt also nur noch die spezielle Lösung übrig.

Diese können wir z.B. durch Fourier-Transformation finden: Sei

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} F(t) \tag{3.98}$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} F(\omega) \tag{3.99}$$

und analog für $x(t), x(\omega)$. Fourier-Transformation der Differentialgleichung liefert

$$-\omega^2 x(\omega) + 2\beta i\omega x(\omega) + \omega_0^2 x(\omega) = \frac{F(\omega)}{m} \tag{3.100}$$

$$\Rightarrow \quad x(\omega) = \frac{1}{m}\frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \tag{3.101}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{m}\frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}. \tag{3.102}$$

Beispiel: $F(t) = F_0 \cos \Omega t$. Wir gehen zur komplexen Kraft $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ über und erinnern uns später, dass nur der Realteil der Lösung physikalisch relevant ist. Dann ist

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} F_0 e^{i\Omega t} = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega+\Omega)t} \\ &= 2\pi F_0 \delta(\omega + \Omega) \end{aligned} \tag{3.103}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{\delta(\omega+\Omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\omega} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} e^{i\Omega t} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\, e^{i\phi} e^{i\Omega t} \end{aligned} \tag{3.104}$$

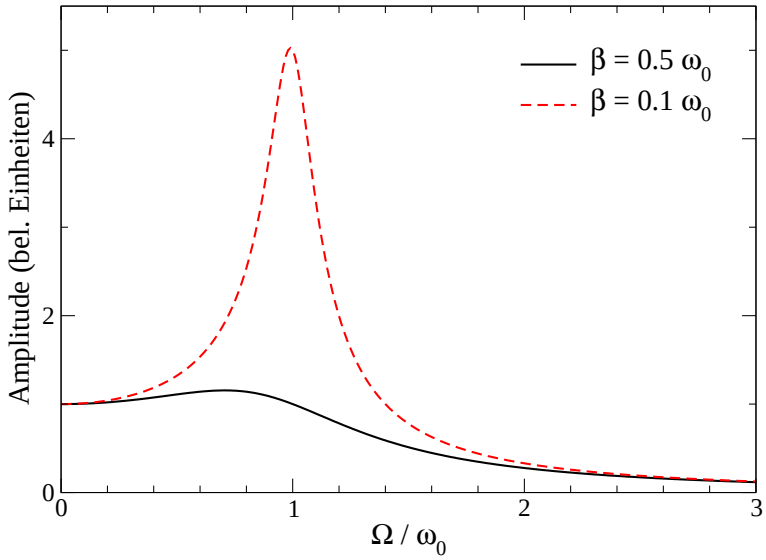
mit $\tan\phi = 2\beta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)$, wobei wir wegen $\mathrm{Im}\,(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega) = 2\beta\Omega > 0$ die Lösung mit $0 < \phi < \pi$ wählen müssen. Die physikalische Lösung ist

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \cos(\omega t + \phi). \tag{3.105}$$

Wir finden das Phänomen der *Resonanz*: Für $\Omega \approx \omega_0$, d.h. Antrieb nahe der *Eigenfrequenz* des Oszillators, wird die Amplitude

$$\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \tag{3.106}$$

der Schwingung groß und divergiert sogar für kleine Dämpfungen $\beta \to 0$. Die Amplitude als Funktion von Ω/ω_0 ist hier dargestellt:



3.10 Arbeit und Energie

3.10.1 Arbeit

Wir betrachten die Newtonsche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt in drei Dimensionen, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. Wir nehmen $m = \text{const}$ an, dann folgt

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{3.107}$$

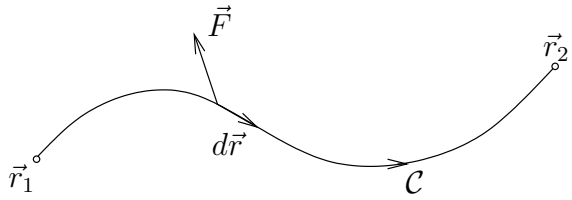
Es ist klar, dass eine Anstrengung nötig ist, um einen Körper gegen eine Kraft zubewegen (z.B. Stauchung einer Feder). Ein quantitatives Maß dafür ist die *Arbeit*: Um einen Massenpunkt in einem Kraftfeld $\vec{F}$ von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + d\vec{r}$ zu bewegen, muss die Arbeit

$$\delta W := -\vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{3.108}$$

geleistet werden. Für eine Bewegung *entgegen* der Kraft ist $\vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$ und daher $\delta W > 0$ (Arbeit muss *geleistet* werden):

Wir verwendet hier mit Absicht ein besonderes Symbol δW für die infinitesimale Arbeit, auf dessen Bedeutung wir in Kürze zurückkommen. Die geleistete Arbeit für eine nicht infinitesimale Bewegung vom Ort $\vec{r}_1$ zum Ort $\vec{r}_2$ entlang einer Bahn $\mathcal{C}$ lautet dann

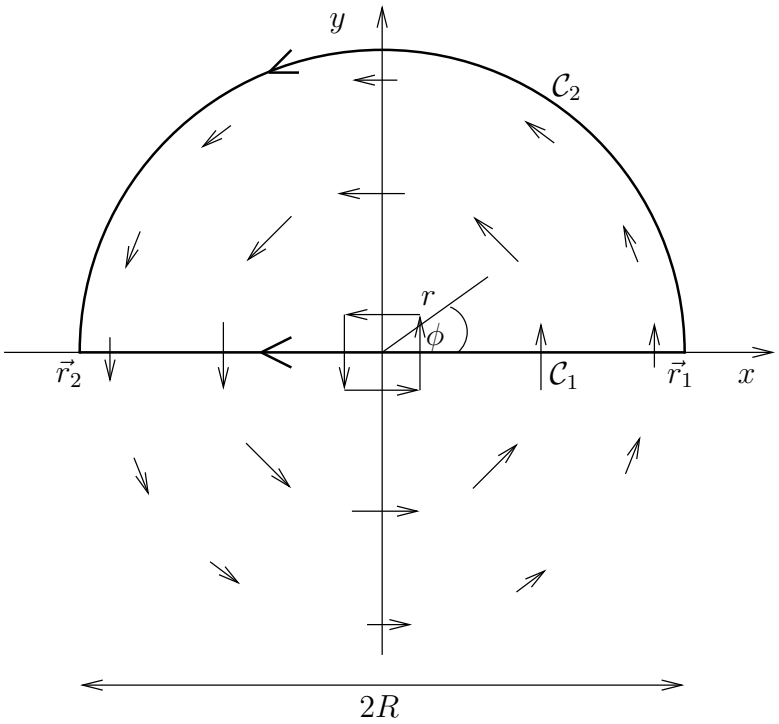
$$W_{\mathcal{C}} = -\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \tag{3.109}$$



Das Kurvenintegral rechnet man aus, indem man $\vec{r}$ entlang der Bahn durch einen skalaren Parameter ausdrückt. Das kann z.B. die Zeit t oder die Bogenlänge s sein.

Beispiel: In zwei Dimensionen sei

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{\phi}. \tag{3.110}$$



Wir betrachten die skizzierten Bahnen $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, die jeweils während der Zeit t mit konstanter Geschwindigkeit $|\dot{\vec{r}}|$ durchlaufen werden sollen. (Die Geschwindigkeit ist für die beiden Bahnen verschieden.) Es ist

$$W_{\mathcal{C}_1} = -\int_0^T \underbrace{\underbrace{d\vec{r}}_{= -dt\frac{2R}{T}\hat{x}} \cdot \frac{\alpha}{r^2}\hat{\phi}} = \frac{2R}{T}\int_0^T dt\frac{\alpha}{r^2}\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{\phi}}_{=0} = 0 \qquad \text{(da überall auf der Bahn } \vec{F} \perp d\vec{r} \text{ gilt)} \tag{3.111}$$

aber

$$W_{\mathcal{C}_2} = -\int_0^T \underbrace{\underbrace{d\vec{r}}_{= dt\frac{\pi R}{T}\hat{\phi}} \cdot \frac{\alpha}{R^2}\hat{\phi}} = -\frac{\pi R}{T}\frac{\alpha}{R^2}\underbrace{\int_0^T dt\underbrace{\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}}_{=1}}_{=T} = -\frac{\pi\alpha}{R} \neq 0. \tag{3.112}$$

Die Arbeit ist hier also vom Weg abhängig.

Wir kommen zu der Bedeutung des Symbols δW zurück. δW anstelle von dW bedeutet, dass δW zwar infinitesimal ist, aber nicht unbedingt ein *totales Differential*. Es wäre ein totales Differential, wenn eine Funktion $W(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ existierte, so dass

$$\begin{aligned} \delta W &= dW = \frac{\partial W}{\partial r_1}dr_1 + \frac{\partial W}{\partial r_2}dr_2 + \frac{\partial W}{\partial r_3}dr_3 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_1}d\dot{r}_1 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_2}d\dot{r}_2 + \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_3}d\dot{r}_3 + \frac{\partial W}{\partial t}dt \\ &\equiv \frac{\partial W}{\partial \vec{r}}d\vec{r} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{r}}}d\dot{\vec{r}} + \frac{\partial W}{\partial t}dt. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Wir wissen aber nach der Definition, dass $\delta W = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$ gilt, also müsste dann gelten

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}W = -\vec{F} \quad \text{und} \quad \frac{\partial W}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \tag{3.114}$$

Damit δW ein totales Differential ist, darf W also nur vom Ort $\vec{r}$ abhängen und muss $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}W(\vec{r})$ gelten. $\vec{F}$ hängt dann natürlich auch nur vom Ort ab. Ist δW ein totales Differential, so nennt man das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ *konservativ*.

Allgemein sind folgende Aussagen für $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ äquivalent:

- $\vec{F}$ ist konservativ,
- $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$,
- es existiert eine Funktion $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$,
- die Arbeit $-\int\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{F}$ hängt nicht vom Weg ab, nur von den Endpunkten,
- die Arbeit $-\oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\mathcal{C}$.

Wir wollen hier nicht alle Äquivalenzen beweisen. Wir zeigen nur, dass aus $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ die beiden letzten Eigenschaften folgen: $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ seien zwei Wege mit gemeinsamem Anfangspunkt $\vec{r}_1$ und Endpunkt $\vec{r}_2$. Aus $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ folgt dann $W_{\mathcal{C}_1} = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int\limits_{\mathcal{C}_1} d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)$ und analog $W_{\mathcal{C}_2} = \ldots = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)$, also $W_{\mathcal{C}_1} = W_{\mathcal{C}_2}$. Der letzte Punkt folgt sofort, indem man den geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ in zwei Teile $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ aufteilt und beachtet, dass die Arbeit ihr Vorzeichen ändert, wenn man einen Weg in umgekehrter Richtung durchläuft. Im obigen Beispiel ist $\vec{F} = (\alpha/r^2)\hat{\phi}$ also nicht konservativ,

Es ist wichtig, sich zu merken, dass ein konservatives Kraftfeld auf jeden Fall nur von $\vec{r}$, nicht von $\dot{\vec{r}}$ oder t abhängen darf. Also ist z.B. das Kraftfeld $\vec{F} = (c\sin\omega t)\,\vec{r}$ mit einer Konstanten c *nicht* konservativ, obwohl es $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ erfüllt.

3.10.2 Leistung

Die geleistete Arbeit pro Zeiteinheit ist die *Leistung*

$$P := \frac{dW}{dt} \tag{3.115}$$

Mit

$$W = -\oint\limits_{\mathcal{C}} d\vec{r}\cdot\vec{F} \quad = \quad -\int\limits_{t_0}^{t} dt'\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{F} \quad = \quad -\int\limits_{t_0}^{t} dt'\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} \tag{3.116}$$

folgt unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} P &= -\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t} dt'\dot{\vec{r}}(t')\cdot\vec{F}(\vec{r}(t'),\dot{\vec{r}}(t'),t') \\ &= -\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t) = -\dot{\vec{r}}\cdot\vec{F}. \end{aligned} \tag{3.117}$$

3.10.3 Kinetische Energie und Energieerhaltung

Aus der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ folgt

$$m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}. \tag{3.118}$$

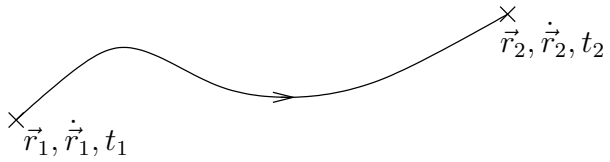
Die linke Seite ist die Zeitableitung der *kinetischen Energie*

$$T := \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2}, \tag{3.119}$$

also

$$\frac{dT}{dt} = m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -P \tag{3.120}$$

Für eine Bewegung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ folgt



$$W_{21} = \int_{t_1}^{t_2} dt P(t) = -\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dT}{dt} = T_1 - T_2. \tag{3.121}$$

Die geleistete Arbeit ist also gleich der Änderung der kinetischen Energie. Ist insbesondere das Kraftfeld konservativ, so hängt W_{21} nicht vom Weg ab, sondern nur vom Potential V am Anfangs- und Endpunkt:

$$W_{21} = V_2 - V_1 = T_1 - T_2 \tag{3.122}$$

$$\Rightarrow \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \tag{3.123}$$

Für konservative Kräfte ist die Summe $T + V$ also *erhalten*. Wir nennen V die *potentielle Energie* und $E := T + V$ die *Gesamtenergie* oder einfach *Energie* des Massenpunktes. Wir haben also den wichtigen *Energieerhaltungssatz*

$$\boxed{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(\vec{r}) = E = \text{const}} \tag{3.124}$$

für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gefunden.

3.11 Drehimpuls und Drehmoment

Wir definieren als weitere Größe den *Drehimpuls* eines Massenpunktes

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \tag{3.125}$$

Wie ändert sich der Drehimpuls unter dem Einfluss einer Kraft? Wir finden

$$\dot{\vec{L}} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{3.126}$$

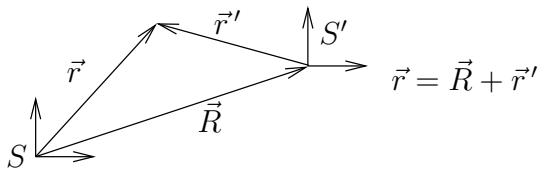
Diese Größe nennen wir das *Drehmoment*

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}, \tag{3.127}$$

so dass gilt

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}.} \tag{3.128}$$

Wichtig: $\vec{L}$ hängt (anders als $\vec{p}$) von der Wahl des Koordinatenursprungs, also von *rein räumlichen* Transformationen, ab:



Sei nämlich $\dot{\vec{R}} = 0$ (zeitunabhängige Verschiebung), dann ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m(\vec{R} + \vec{r}') \times \dot{\vec{r}}' \\ &= m\vec{R} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{L}' = \vec{R} \times \vec{p}' + \vec{L}'. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Es ist also wichtig, den Ursprungspunkt anzugeben.

Offenbar ist der Drehimpuls erhalten, wenn $\vec{M} = 0$ gilt. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- $\vec{F} = 0$ (trivial)
- $\vec{F}$ parallel zu $\vec{r}$, also $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\hat{r}$, d.h. $\vec{F}$ ist ein *Zentralkraftfeld*.

Auf Zentralkraftfelder kommen wir in Kürze zurück.

Ist der Drehimpuls erhalten, so können wir eine wichtige Aussage über die Form der Bahn machen. Wir gehen von der Feststellung aus, dass $\vec{L}$ senkrecht auf $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ steht. Ist nun $\vec{L} = \text{const}$, so stehen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ für alle Zeiten senkrecht auf dem konstanten $\vec{L}$. Die von $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ aufgespannte Ebene ist also zeitunabhängig. Damit liegt die gesamte Bahn in dieser Ebene, die außerdem den Nullpunkt enthält. (Bemerkung: Der Binormaleneinheitsvektor muss dann also ebenfalls konstant sein und es muss $\vec{L} = \pm L\hat{b}$ gelten.)

3.12 Zentralkräfte

Wir schließen noch eine vertiefte Diskussion der aus Abschnitt 3.6.3 bekannten Zentralkräfte an. Nach der Definition haben Zentralkräfte die Form

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = f(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\hat{r}. \tag{3.130}$$

Dann gilt

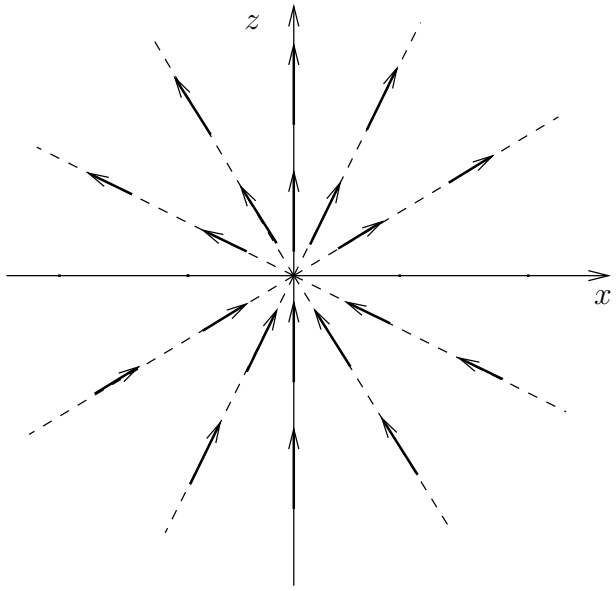
$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times f\hat{r} = rf\hat{r}\times\hat{r} = 0, \tag{3.131}$$

also ist der Drehimpuls erhalten und die Bahn eben, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben.

Es ist wichtig einzusehen, dass Zentralkraftfelder nicht kugelsymmetrisch sein müssen, z.B.

$$\vec{F} = (f_0\cos\theta)\,\hat{r}, \tag{3.132}$$

aber $\vec{L} = \text{const}$ gilt in jedem Fall. Kugelsymmetrie ist für Drehimpulserhaltung nicht erforderlich.



Wann ist ein Zentralkraftfeld konservativ? Es muss $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ gelten, also

$$f(\vec{r})\hat{r} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \tag{3.133}$$

Der Gradient lautet in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{3.134}$$

Bei einem Zentralkraftfeld darf der Gradient aber nur eine $\hat{r}$-Komponente haben. Es folgt

$$f(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{3.135}$$

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \tag{3.136}$$

$$0 = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} \tag{3.137}$$

$$\Rightarrow \quad V = V(r), \tag{3.138}$$

also darf das Potential nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängen. In diesem Fall sprechen wir von einem *Zentralpotential*.

Bemerkung: Es existieren konservative und nicht konservative Zentralkräfte. Ebenso existieren konservative und nicht konservative nicht zentrale Kräfte.

In einem Zentralpotential sind der Drehimpuls (wegen der Zentralkraft $-\vec{\nabla}V$) und die Energie (weil ein Potential existiert) erhalten. Das können wir ausnutzen: Die Bahn ist eben ($\vec{L} = \text{const}$), wir wählen ein

Koordinatensystem so, dass die Bahn in der xy-Ebene liegt und wählen ebene Polarkoordinaten r, ϕ. Der Drehimpuls ist

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m\vec{r}\times(\underbrace{\dot{r}\hat{r}}_{\text{ergibt Null}} + r\dot{\phi}\hat{\phi}) \quad \text{(vgl. Abschnitt 2.1)}\\ &= mr^2\dot{\phi}\hat{r}\times\hat{\phi} = mr^2\dot{\phi}\hat{z} \stackrel{!}{=} \text{const.}\end{aligned} \tag{3.139}$$

Die Energie ist

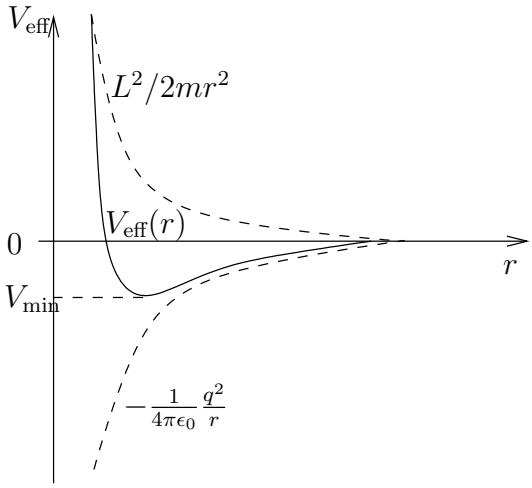
$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})^2 + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 + V(r) \stackrel{!}{=} \text{const.} \tag{3.140}$$

Hier können wir $\dot{\phi}$ durch L ausdrücken:

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}\\ &=: \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)\end{aligned} \tag{3.142}$$

V_{eff} nennt man das *effektive Potential*. Wir haben jetzt die Energie für ein effektives *eindimensionales* Problem mit der einzigen Koordinate r erhalten. Wegen $m\dot{r}^2/2 \geq 0$ muss $E \geq V_{\text{eff}}(r)$ gelten. Das schränkt die möglichen Bahnen ein: z.B. für $V(r) = -q^2/4\pi\epsilon_0 r$ existieren drei Fälle:



- für $E < V_{\text{min}}$ existieren keine Lösungen,
- $V_{\text{min}} \leq E < 0$ ist der Radius r beschränkt auf das endliche Interval, in dem $E \geq V_{\text{eff}}$ gilt, die Bewegung ist gebunden,
- für $E \geq 0$ ist der Radius nach unten beschränkt durch $E \geq V_{\text{eff}}(r)$, *kann* aber beliebig groß werden, die Bewegung *kann* ungebunden sein (sicher wissen wir das noch nicht).

3.13 Die Planetenbewegung

Wir betrachten speziell die Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\hat{r}. \tag{3.143}$$

Das ist offensichtlich eine Zentralkraft. Sie ist konservativ, da $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ gilt, wobei

$$V = V(r) = -\gamma\frac{mM}{r}. \tag{3.144}$$

Wir wissen also, dass Energie E und Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten sind. Damit ist die Bahn eben. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, wie man weiter vorgehen kann. Wir betrachten nur eine davon.

(a) Wir definieren den *Lenzschen Vektor* (beachte die Schreibung des Namens)

$$\vec{A} := \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(r)\,\vec{r}. \tag{3.145}$$

Da $\vec{L}$ senkrecht auf der Bahnebene steht und $\vec{r}$ in der Bahnebene liegt, liegt auch $\vec{A}$ in der Bahnebene. Es ist

$$\dot{\vec{A}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \cancel{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}}} + \frac{\partial V}{\partial r}\dot{r}\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}}. \tag{3.146}$$

Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V = -\hat{r}\frac{\partial V}{\partial r} \tag{3.147}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \times \vec{L} + \frac{\partial V}{\partial r}\dot{r}\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{r}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}\right)\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}} \\
&= -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{r}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\cancel{2}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{\cancel{2}r}\vec{r} + V(r)\dot{\vec{r}}.
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Wegen des Entwicklungssatzes $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ gilt $\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}r^2$, also

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{A}} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{1}{r}\left[\cancel{-\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})} + \dot{\vec{r}}r^2 + \cancel{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}}\right] + V(\vec{r})\dot{\vec{r}} \\
&= \left[r\frac{\partial V}{\partial r} + V(r)\right]\dot{\vec{r}}.
\end{aligned} \tag{3.149}$$

Nun setzen wir das Gravitationspotential ein:

$$\dot{\vec{A}} = \left[\gamma\frac{mM}{r} - \gamma\frac{mM}{r}\right]\dot{\vec{r}} = 0. \tag{3.150}$$

Also ist der Lenzsche Vektor eine weitere Erhaltungsgröße!

(b) Wir wollen nun die geometrische Form der Bahn bestimmen. Dazu benötigen wir eine Gleichung für $\vec{r}$ allein, in der weder die Zeit noch die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ auftreten. Wir haben $\vec{A} = -\vec{L} \times \dot{\vec{r}} + V(r)\,\vec{r}$ und wir wissen, dass $\dot{\vec{r}}$ orthogonal zu $\vec{L}$ ist. Es folgt

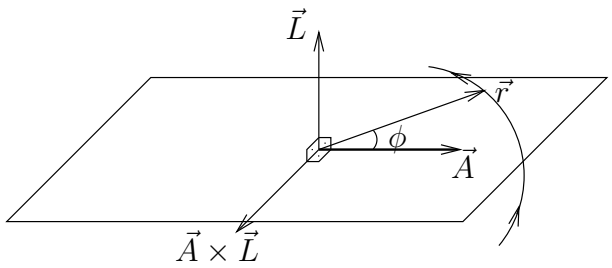
$$\vec{L} \times \vec{A} = -\vec{L} \times (\vec{L} \times \dot{\vec{r}} + V(r)\vec{L} \times \vec{r} = +L^2\dot{\vec{r}} + V(r)\vec{L} \times \vec{r} \tag{3.151}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{L} \times \vec{A}}{L^2} - \frac{V(r)\vec{L} \times \vec{r}}{L^2}. \tag{3.152}$$

Nun gilt $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \text{const}$, also

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{L}}{m} &= \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \times (\vec{L} \times \vec{A})}{L^2} - \frac{V(r)\vec{r} \times (\vec{L} \times \vec{r})}{L^2} \\
&= -\frac{\vec{L} \times \vec{A}}{L^2} \times \vec{r} - \frac{V(r)}{L^2}r^2\vec{L} + \frac{V(r)}{L^2}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{L})}_{=0}\vec{r} \\
&= \frac{\vec{A} \times \vec{L}}{L^2} \times \vec{r} + \frac{\gamma mM}{L^2}r\vec{L}.
\end{aligned} \tag{3.153}$$

Sei ϕ der Winkel von $\vec{r}$ gegenüber $\vec{A}$ in der Bahnebene.



Die x- und y-Komponenten der Gleichung (3.153) sind trivial ($0 = 0$). Die z-Komponente lautet

$$\frac{L}{m} = \frac{A}{L}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}_{\cos\phi} r + \frac{\gamma m M}{L} r \tag{3.154}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{\gamma m^2 M}{L^2} + \frac{mA}{L^2}\cos\phi$$

$$= \frac{\gamma m^2 M}{L^2}\left(1 + \frac{A}{\gamma m M}\cos\phi\right). \tag{3.155}$$

Dies hat die Form der Gleichung

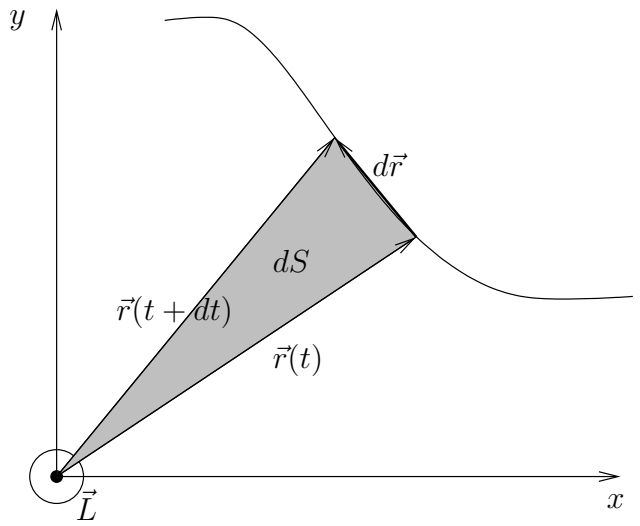
$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon\cos\phi)} \tag{3.156}$$

eines *Kegelschnittes* mit einem Brennpunkt bei $\vec{r} = 0$. Der Parameter $\epsilon = A/\gamma m M$ entscheidet über die genaue Form der Bahnkurve:

$\epsilon = 0$	:	Kreis
$0 < \epsilon < 1$	:	Ellipse
$\epsilon = 1$	:	Parabel
$\epsilon > 1$	:	Hyperbel

Insbesondere sehen wir, dass die *gebundenen* Bahnen, die für die Planetenbewegung wichtig sind, Ellipsen (im Grenzfall Kreise) sind. Das ist das *1. Keplersche Gesetz*. Wir leiten noch die anderen beiden Keplerschen Gesetze her:

(c) Wegen $\dot{\vec{L}} = 0$ ist die Bahn eben. Sei dS die vom „Fahrstrahl“ (d.h. dem Radiusvektor $\vec{r}$) während des Zeitintervals dt überstrichene Fläche.



dS ist die Hälfte des von $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}(t+dt)$ aufgespannten Parallelogramms:

$$dS = \frac{|\vec{r}(t)\times\vec{r}(t+dt)|}{2}$$

$$= \frac{|\vec{r}(t)\times[\cancel{\vec{r}(t)} + \dot{\vec{r}}(t)dt]|}{2} \quad \text{(Taylor-Entwicklung)}$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|dt = \frac{1}{2m}|\vec{L}|dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const} \tag{3.157}$$

Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten (dt) gleiche Flächen (dS). Das ist das *2. Keplersche Gesetz*. Beachte: Es folgt *allein* aus der Drehimpulserhaltung.

(d) Aus (c) folgt

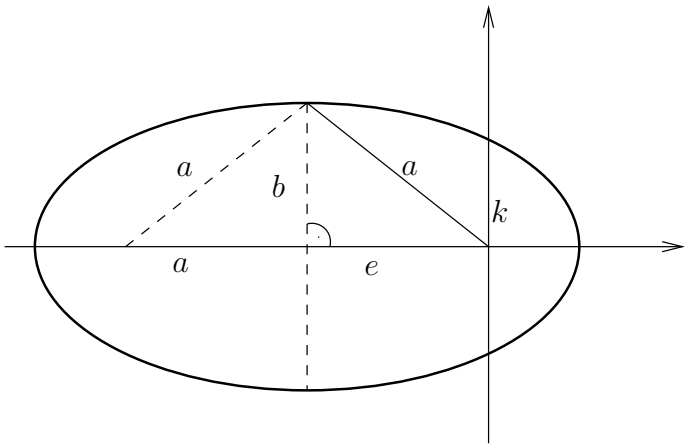
$$\int_0^\tau dt\,\frac{dS}{dt} = \int_0^\tau dt\,\frac{L}{2m} \tag{3.158}$$

mit der Umlaufzeit τ. Daher gilt für die Gesamtfläche der Ellipse $S = L\tau/2m$. Andererseits ist $S = \pi ab$ mit den Halbachsen a, b. Sei o.B.d.A. $a > b$. Es folgt

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{(\frac{2mS}{L})^2}{a^3} = \frac{(\frac{2m\pi ab}{L})^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 b^2}{L^2 a}. \tag{3.159}$$

Nun gilt für die Ellipsenbahn

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 + \epsilon \cos\phi) \tag{3.160}$$



und die Ellipse ist die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände von den beiden Brennpunkten konstant gleich $2a$ ist. Der sonnennächste Punkt hat

$$r = r_{\min} = \frac{k}{1+\epsilon} = a - e \tag{3.161}$$

und der sonnenfernste

$$r = r_{\max} = \frac{k}{1-\epsilon} = a + e. \tag{3.162}$$

Es folgt

$$k = (1+\epsilon)(a-e) = (1-\epsilon)(a+e) \tag{3.163}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{a} - e + \epsilon a - \cancel{\epsilon} e = \cancel{a} + e - \epsilon a - \cancel{\epsilon} e \tag{3.164}$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon = \frac{e}{a}. \tag{3.165}$$

Einsetzen in $r_{\min}$ ergibt $r_{\min} = a - e = k/(1 + e/a) = ka/(a + e)$, also $(a + e)(a - e) = ka$ und $a^2 - e^2 = ka$. Andererseits ist $a^2 - e^2 = b^2$, also $b^2 = ka$. Daraus folgt $b^2/a = k = L^2/\gamma m^2 M$ und schließlich

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\frac{L^2}{\gamma m^2 M} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const.} \tag{3.166}$$

Das ist das *3. Keplersche Gesetz.*

Kapitel 4

Mehrteilchensysteme

Systeme von praktischem Interesse bestehen oft aus vielen Teilchen. In diesem Kapitel untersuchen wir, wie sich die Newton-Mechanik für diese Situation verallgemeinern lässt.

4.1 Erhaltungssätze bei Systemen mehrerer Massenpunkte

4.1.1 Impulserhaltung

Wir betrachten zunächst Systeme aus N Teilchen mit den Massen m_i und Orten $\vec{r}_i$, $i = 1, \ldots, N$. Die Gesamtkraft $\vec{F}_i$ auf Teilchen i setzt sich zusammen aus der *äußeren* Kraft $\vec{F}_i^{\text{ex}}$ und den von anderen Teilchen $j \neq i$ ausgeübten *inneren* Kräften $\vec{F}_{ij}$:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}. \tag{4.1}$$

Für jeden Massenpunkt mit konstanter Masse gilt, wie wir aus Kap. 3 wissen, das 2. Axiom

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}. \tag{4.2}$$

Außerdem gilt das 3. Axiom

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \tag{4.3}$$

Das 3. Axiom wird erst hier wichtig – in der Ein-Teilchen-Dynamik spielt es keine Rolle. Wir definieren:

$$M := \sum_i m_i \quad \text{(Gesamtmasse)}, \tag{4.4}$$

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \text{(Schwerpunkt)}, \tag{4.5}$$

$$\vec{p} := \sum_i \vec{p}_i \quad \text{(Gesamtimpuls)}. \tag{4.6}$$

Es gilt $M\ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ex}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}}_{=0} = \vec{F}^{\text{ex}}$, also zusammengefasst der *Schwerpunktsatz*

$$\boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ex}}.} \tag{4.7}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich wie ein Massenpunkt mit der Gesamtmasse M, auf den die Summe aller *äußeren* Kräfte wirkt. Allgemeiner gilt

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{\text{ex}}, \tag{4.8}$$

auch falls die Massen nicht konstant sind. Insbesondere gilt der *Impulserhaltungssatz*

$$\boxed{\vec{F}^{\text{ex}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \text{const.}} \tag{4.9}$$

Der Gesamtimpuls ist also genau dann erhalten, wenn die Gesamtkraft verschwindet. Bemerkungen: 1. Die einzelnen $\vec{p}_i$ sind i.A. nicht erhalten. 2. Die einzelnen Kräfte $\vec{F}_i^{\text{ex}}$ und auch $\vec{F}_{ij}$ müssen nicht verschwinden.

4.1.2 Drehimpulserhaltung

Weiter definieren wir den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} := \sum_i \vec{L}_i \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i. \tag{4.10}$$

Es gilt für $m_i = \text{const}$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_i \left[\cancel{m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i} + m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \right] \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für den Beitrag der *inneren* Kräfte gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{i \neq j} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{= -\vec{F}_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij, i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

wobei wir im ersten Schritt in der Hälfte des Terms die Bezeichnungen i und j vertauscht haben.

Falls die inneren Kräfte sämtlich Zentralkräfte sind, sind die $\vec{F}_{ij}$ parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ (Beispiel: Coulomb-Kraft) und ihr Beitrag zu $\dot{\vec{L}}$ verschwindet. Dann ist

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}}. \tag{4.13}$$

Wir definieren das äußere Drehmoment $\vec{M}_i^{\text{ex}} := \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}}$ und das Gesamtdrehmoment

$$\vec{M}^{\text{ex}} := \sum_i \vec{M}_i^{\text{ex}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ex}}. \tag{4.14}$$

Dann gilt $\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{\text{ex}}$ und insbesondere der *Drehimpulserhaltungssatz*

$$\boxed{\vec{M}^{\text{ex}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{L} = \text{const},} \tag{4.15}$$

falls die inneren Kräfte Zentralkräfte sind.

4.1.3 Energieerhaltung

Aus $\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$ folgt

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i =: \frac{d}{dt} T \tag{4.16}$$

mit der gesamten kinetischen Energie T. Wir müssen uns noch überlegen, wie der Begriff der konservativen Kraft sinnvoll auf Mehrteilchensysteme zu verallgemeinern ist. Eine *Konfiguration* des Systems wird durch die Angabe der N Orte $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ eindeutig beschrieben. Wir nennen das System bzw. die wirkenden Kräfte *konservativ*, wenn alle Integrale der Form

$$\begin{aligned} W_{21} &= -\int_{\vec{r}_1^{(1)}}^{\vec{r}_1^{(2)}} d\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_1 - \int_{\vec{r}_2^{(1)}}^{\vec{r}_2^{(2)}} d\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_2 - \ldots \\ &= -\sum_i \int_{\vec{r}_i^{(1)}}^{\vec{r}_i^{(2)}} d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i \end{aligned} \tag{4.17}$$

nur von den Start- und Endkonfigurationen abhängen, aber nicht von den Wegen dazwischen und auch nicht von den Geschwindigkeiten oder der Zeit. Also muss ein Potential $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$ existieren, so dass gilt

$$W_{21} = V(\vec{r}_1^{(2)}, \vec{r}_2^{(2)}, \ldots) - V(\vec{r}_1^{(1)}, \vec{r}_2^{(1)}, \ldots). \tag{4.18}$$

Wählen wir speziell zwei Konfigurationen, zwischen denen sich nur der Ort des Teilchens i ändert, und zwar von $\vec{r}_i$ nach $\vec{r}_i + d\vec{r}_i$, so ist

$$\begin{aligned} W_{21} &= -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_i+d\vec{r}_i} d\vec{r}_i' \cdot \vec{F}_i \\ &= V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_i + d\vec{r}_i, \ldots) - V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_i, \ldots) \\ &= \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i \end{aligned} \tag{4.19}$$

(Taylor-Entwicklung). Nun ist andererseits

$$W_{21} = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_i+d\vec{r}_i} d\vec{r}_i' \cdot \vec{F}_i = -d\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i. \tag{4.20}$$

Es folgt

$$-\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i \tag{4.21}$$

für alle infinitesimalen Verrückungen $d\vec{r}_i$. Also sind konservative Kräfte durch Gradienten gegeben,

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)}{\partial \vec{r}_i}. \tag{4.22}$$

Damit folgt für konservative Kräfte

$$\frac{d}{dt}T = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = -\frac{dV}{dt} \tag{4.23}$$

(Kettenregel) und schließlich

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0. \tag{4.24}$$

Also ist $T + V =: E$, die *Gesamtenergie*, eine Erhaltungsgröße, falls alle Kräfte konservativ sind. Sind sie es nicht, können wir $\vec{F}_i$ in einen *konservativen* Anteil $-\partial V/\partial \vec{r}_i$ und einen *dissipativen* Anteil $\vec{F}_i^{\text{diss}}$ aufspalten und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T &= \sum_i \left(-\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} + \vec{F}_i^{\text{diss}} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= -\frac{d}{dt}V + \sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i \end{aligned} \tag{4.25}$$

und damit

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}(T+V)}_{\text{Änderung der Gesamtenergie}} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{\text{Leistung der dissipativen Kräfte}}} \tag{4.26}$$

Insbesondere folgt der *Energieerhaltungssatz*

$$\boxed{E = T + V = \text{const} \quad \text{falls } \vec{F}_i^{\text{diss}} \equiv 0 \quad \forall i.} \tag{4.27}$$

4.2 Der Virialsatz

Wir führen zunächst ein neues Konzept ein, nämlich das des *zeitlichen Mittelwertes*. Für irgendeine zeitabhängige Größe $f(t)$ definieren wir den zeitlichen Mittelwert durch

$$\langle f \rangle := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt\, f(t), \tag{4.28}$$

wobei t_0 eine Anfangszeit ist, zu der wir das System präpariert haben. Der Mittelwert sollte nicht von der Wahl von t_0 abhängen, wenn doch, sollten wir prüfen, ob wir etwas sinnvolles ausrechnen. Wir leiten jetzt eine Aussage über die zeitlich gemittelte kinetische Energie her: Aus $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$ folgt

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i. \tag{4.29}$$

Die linke Seite ist

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i - \underbrace{\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i}_{=2T}. \tag{4.30}$$

Wir beschränken uns auf konservative Kräfte. Dann ist die rechte Seite

$$\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i \tag{4.31}$$

und es folgt

$$-\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i + 2T = \sum_i \frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i. \tag{4.32}$$

Wir bilden den zeitlichen Mittelwert: Für den ersten Term ergibt sich

$$\left\langle -\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\right\rangle = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} dt\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i = -\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\right]_{t_0}^{t_0+\tau}. \tag{4.33}$$

Sind nun Orte und Geschwindigkeiten beschränkt (im Einzelfall zu prüfen!), so ist dies

$$\ldots = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\,[\text{beschränkt}] = 0 \tag{4.34}$$

und es folgt der *Virialsatz*

$$\boxed{2\langle T\rangle = \left\langle\sum_i \frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\cdot\vec{r}_i\right\rangle.} \tag{4.35}$$

Die rechte Seite des Virialsatzes nennt man das *Virial* der Kräfte.

In dieser allgemeinen Form ist der Virialsatz nicht besonders anschaulich. Betrachten wir den wichtigen Fall von Potentialen in der Form von Potenzgesetzen,

$$V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots) = \frac{1}{2}\sum_{ij,i\neq j}\alpha_{ij}\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|^m \tag{4.36}$$

mit $\alpha_{ji}=\alpha_{ij}$ und $m\neq 0$. Dann lautet die Kraft auf Teilchen i

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_i}\sum_{kl,k\neq l}\alpha_{kl}\left|\vec{r}_k-\vec{r}_l\right|^m. \tag{4.37}$$

Es treten Beiträge auf, wenn $k=i$ oder $l=i$ ist,

$$\vec{F}_i = \frac{1}{2}\sum_{l\neq i}\alpha_{il}\,m\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^{m-1}\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_l}{|\vec{r}_i-\vec{r}_l|} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq i}\alpha_{ki}\,m\left|\vec{r}_k-\vec{r}_i\right|^{m-1}\frac{\vec{r}_k-\vec{r}_i}{|\vec{r}_k-\vec{r}_i|}, \tag{4.38}$$

wegen $\partial|\vec{r}|/\partial\vec{r} = \operatorname{div}|\vec{r}| = \vec{r}/|\vec{r}| = \hat{r}$. Da die beiden Terme gleich sind, folgt weiter

$$\vec{F}_i = -\sum_{l\neq i}\alpha_{il}\,m\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^{m-2}(\vec{r}_i-\vec{r}_l). \tag{4.39}$$

Das Virial ist

$$\left\langle\sum_i \vec{r}_i\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\right\rangle = -\left\langle\sum_i\vec{r}_i\cdot\vec{F}_i\right\rangle = \left\langle\sum_{il,i\neq l}\alpha_{il}m\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^{m-2}(\vec{r}_i-\vec{r}_l)\cdot\vec{r}_i\right\rangle. \tag{4.40}$$

Mittels Umbenennung erhalten wir

$$\begin{aligned}\ldots &= \frac{1}{2}\left\langle\sum_{il,i\neq l}\alpha_{il}m\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^{m-2}(\vec{r}_i-\vec{r}_l)\cdot\vec{r}_i\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\sum_{il,i\neq l}\alpha_{il}m\left|\vec{r}_l-\vec{r}_i\right|^{m-2}(\vec{r}_l-\vec{r}_i)\cdot\vec{r}_l\right\rangle\\ &= \frac{1}{2}\left\langle\sum_{il,i\neq l}\alpha_{il}m\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^m\right\rangle\\ &= m\left\langle\frac{1}{2}\sum_{il,i\neq l}\alpha_{il}\left|\vec{r}_i-\vec{r}_l\right|^m\right\rangle = m\langle V\rangle.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Also nimmt der Virialsatz die einfache Form

$$\boxed{2\langle T\rangle = m\langle V\rangle} \tag{4.42}$$

an. Beispiele: 1. Harmonische Oszillatoren, d.h. ideale Federkräfte zwischen den Massenpunkten: Für diesen Fall gilt $m = 2$, also $2\langle T\rangle = 2\langle V\rangle$ und $\langle T\rangle = \langle V\rangle$ und $\langle E\rangle = E = \text{const} = \langle T\rangle + \langle V\rangle = 2\langle T\rangle$. Die Energie ist also immer positiv. 2. Coulomb- oder Gravitationswechselwirkung: Hier ist $m = -1$, also $2\langle T\rangle = -\langle V\rangle$ und $\langle E\rangle = E = \langle T\rangle - 2\langle T\rangle = -\langle T\rangle < 0$. Die Gesamtenergie ist hier für *gebundene* Bewegungen immer negativ.

4.3 Zwei-Teilchen-Systeme

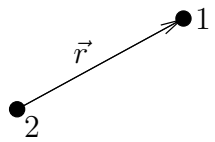
Aus den Erhaltungssätzen aus 4.1 können wir bereits einiges über die Dynamik von Zwei-Teilchen-Systemen lernen. Wir definieren wieder den Schwerpunkt

$$\vec{R} := \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{4.43}$$

außerdem sei der *Abstands-* oder *Relativvektor*

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \tag{4.44}$$

(Achtung: wird oft mit umgekehrtem Vorzeichen definiert).



Dann gilt

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{4.45}$$

Aus

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{\text{ex}} + \vec{F}_{12} \tag{4.46}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{\text{ex}} + \vec{F}_{21} \tag{4.47}$$

folgt $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{\text{ex}} = \vec{F}_1^{\text{ex}} + \vec{F}_2^{\text{ex}}$ (Schwerpunktsatz) und

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{\text{ex}}}{m_1} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ex}}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \frac{\vec{F}_1^{\text{ex}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ex}}}{m_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{=:1/\mu}\vec{F}_{12} \tag{4.48}$$

mit der *reduzierten Masse* μ. Verschwinden die äußeren Kräfte, oder ist $\vec{F}_i^{\text{ex}} \sim m_i$ (Gewichtskraft!), so folgt

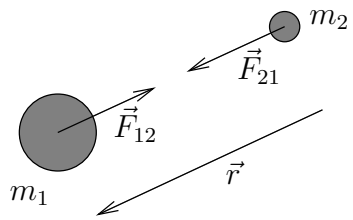
$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}. \tag{4.49}$$

Hängt $\vec{F}_{12}$ nur von $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ab, so entkoppeln die Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$ und $\vec{r}$ zu zwei effektiven Ein-Teilchen-Problemen.

4.3.1 Die Planetenbewegung

In diesem Fall haben wir

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \tag{4.50}$$



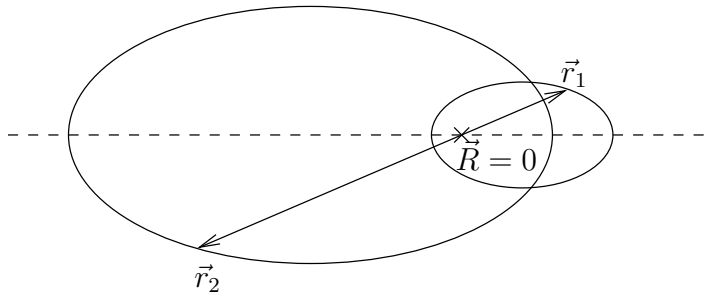
und $\vec{F}^{\text{ex}} = 0$ (also $M\ddot{\vec{R}} = 0$). Die effektive Ein-Teilchen-Bewegungsgleichung ist

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}. \tag{4.51}$$

Wir wissen schon, dass die Lösungen durch die Keplerschen Gesetze beschrieben sind. Insbesondere sind die gebundenen Bahnen Ellipsen. Im Schwerpunktsystem, d.h. dem Bezugssystem mit $\vec{R} = 0$, ist

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{r}. \tag{4.52}$$

$\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ beschreiben daher ebenfalls Ellipsen.



4.4 Streuprozesse

Wir betrachten nun speziell Prozesse, bei denen die beiden Körper nicht, oder zumindest nicht für alle Zeiten, gebunden sind, d.h. bei denen $\vec{r}$ nicht beschränkt ist. Man spricht von Streu- oder Stoßprozessen. Wir beschränken uns auf die Streuung *zweier* Massenpunkte. Es gibt zwei wichtige Bezugssysteme:

1. das *Laborsystem* S_L, in dem ein Experiment durchgeführt wird und in dem wir die Dynamik beschreiben wollen und
2. das *Schwerpunktsystem* S_S, in dem der Schwerpunkt fest und im Ursprung liegt.

In diesem Abschnitt bezeichnen wir Größen im Schwerpunktsystem mit einem Unterstrich: $\underline{\vec{r}}, \dot{\underline{\vec{r}}}$ usw. Die äußeren Kräfte mögen verschwinden, dann ist S_S ein Inertialsystem, das aus S_L durch eine Galilei-Transformation hervorgeht:

$$\dot{\vec{r}}_i - \dot{\underline{\vec{r}}}_i = \dot{\vec{R}} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_i - \underline{\vec{p}}_i = m\dot{\vec{R}}, \tag{4.53}$$

wobei $\dot{\vec{R}}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes in S_L ist, und damit die Geschwindigkeit von S_S gegenüber S_L. Wir bezeichnen Größen vor dem Streuereignis mit Symbolen ohne Strich und Größen nach dem Streuereignis mit Symbolen mit Strich ($'$). Mit „vor“ und „nach“ meinen wir die Grenzfälle $t \to -\infty$ bzw. $t \to \infty$. (Das setzt voraus, dass die entsprechenden Grenzwerte existieren. Dazu muss die Wechselwirkung hinreichend schnell mit $|\vec{r}|$ abfallen.)

Impulserhaltung bedeutet

1. in S_L: $\quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}$,
2. in S_S: $\quad \underline{\vec{p}_1} + \underline{\vec{p}_2} = \underline{\vec{p}_1'} + \underline{\vec{p}_2'} = 0$.

Es folgt

$$\underline{\vec{p}_2} = -\underline{\vec{p}_1} \quad \text{und} \quad \underline{\vec{p}_2'} = -\underline{\vec{p}_1'}. \tag{4.54}$$

Hier stellt $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$ *drei* Gleichungen für die *sechs* unbekannten Impulskomponenten nach dem Stoß dar.

Energieerhaltung bedeutet

1. in S_L: $\quad \dfrac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \dfrac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} = \dfrac{(\vec{p}_1')^2}{2m_1} + \dfrac{(\vec{p}_2')^2}{2m_2} + Q'$,
2. in S_S: $\quad \dfrac{\underline{\vec{p}_1}^{\,2}}{2m_1} + \dfrac{\underline{\vec{p}_2}^{\,2}}{2m_2} = \dfrac{(\underline{\vec{p}_1'})^2}{2m_1} + \dfrac{(\underline{\vec{p}_2'})^2}{2m_2} + \underline{Q'}$.

Q' und $\underline{Q'}$ bezeichnen die Energie, die während des Streuprozesses aus kinetischer in andere Energieformen umgewandelt wird. Es ist

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{\vec{p}_1^{\,2} - (\vec{p}_1')^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2} - (\vec{p}_2')^2}{2m_2} \\ &= \frac{(\underline{\vec{p}_1} + m_1\dot{\vec{R}})^2 - (\underline{\vec{p}_1'} + m_1\dot{\vec{R}})^2}{2m_1} + \dots \\ &= \frac{\underline{\vec{p}_1}^{\,2} - (\underline{\vec{p}_1'})^2}{2m_1} + (\underline{\vec{p}_1} - \underline{\vec{p}_1'}) \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{\underline{\vec{p}_2}^{\,2} - (\underline{\vec{p}_2'})^2}{2m_2} + (\underline{\vec{p}_2} - \underline{\vec{p}_2'}) \cdot \dot{\vec{R}}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

wobei $\underline{\vec{p}_1} + \underline{\vec{p}_2} - \underline{\vec{p}_1'} - \underline{\vec{p}_2'} = 0$, so dass folgt

$$Q' = \underline{Q'}. \tag{4.56}$$

Q' ist also invariant unter der Galilei-Transformation von S_L auf S_S. Wir unterscheiden:

- $Q' = 0$: *elastische* Streuung,
- $Q' > 0$: *inelastische endotherme* Streuung (kinetische Energie nimmt ab), Beispiel: Teilchen bleiben aneinander haften,
- $Q' < 0$: *inelastische exotherme* Streuung (kinetische Energie nimmt zu), Beispiel: Teilchenzerfall.

Die Energieerhaltung liefert *eine* weitere Gleichung für die Bestimmung von $\vec{p}_1', \vec{p}_2'$.

In S_S gilt $\underline{\vec{p}_2} = -\underline{\vec{p}_1}$ und $\underline{\vec{p}_2'} = -\underline{\vec{p}_1'}$. Es folgt

$$\underline{T} = \frac{\underline{\vec{p}_1}^{\,2}}{2m_1} + \frac{\underline{\vec{p}_2}^{\,2}}{2m_2} = \frac{\underline{\vec{p}_1}^{\,2}}{2\mu} = \frac{\underline{\vec{p}_2}^{\,2}}{2\mu} = \frac{\underline{p_i}^{\,2}}{2\mu} \quad \text{für } i = 1, 2 \tag{4.57}$$

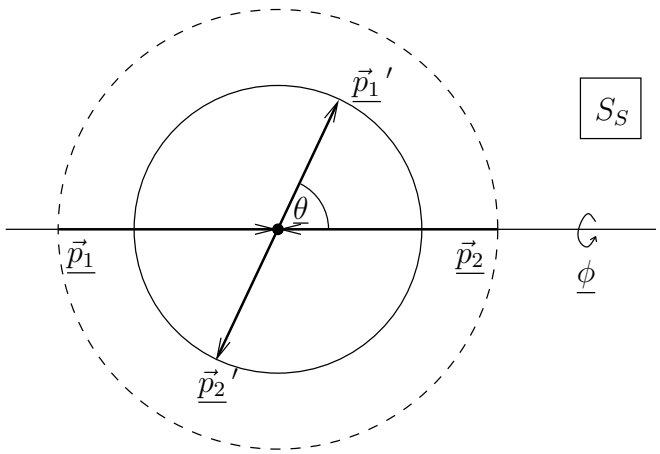
und analog

$$\underline{T'} = \frac{(\underline{p_i'})^2}{2\mu}. \tag{4.58}$$

Aus $\underline{T} = \underline{T'} + Q'$ folgt

$$\begin{aligned} \underline{p_i'} &= \sqrt{2\mu\underline{T'}} = \sqrt{2\mu\underline{T} - 2\mu Q'} \\ &= \sqrt{\underline{p_i}^{\,2} - 2\mu Q'} \quad \text{für } i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Dies legt die *Beträge* der Impulse in S_S fest.



Zusammenfassung: Im Schwerpunktsystem erzwingt Impulserhaltung, dass gilt

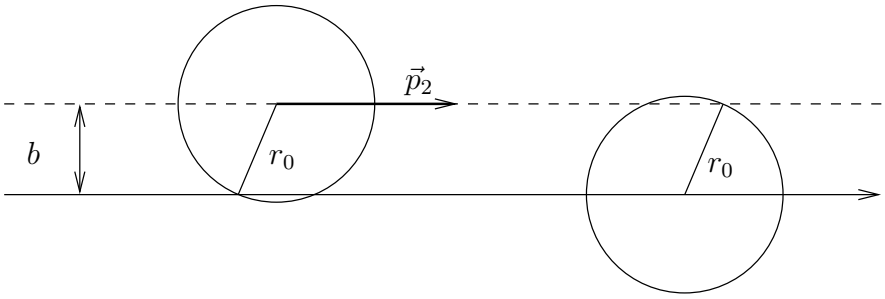
$$\underline{\vec{p}_2} = -\underline{\vec{p}_1} \quad \text{und} \quad \underline{\vec{p}_2'} = -\underline{\vec{p}_1'}. \tag{4.60}$$

Energieerhaltung führt zusätzlich auf

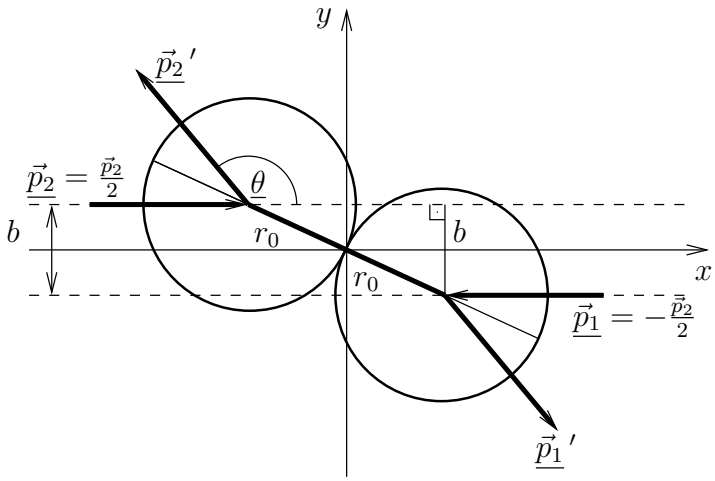
$$\left|\underline{\vec{p}_1'}\right| = \left|\underline{\vec{p}_2'}\right| = \sqrt{\left|\underline{\vec{p}_1}\right|^2 - 2\mu Q'} = \sqrt{\left|\underline{\vec{p}_2}\right|^2 - 2\mu Q'}. \tag{4.61}$$

Zwei von sechs Komponenten von $\underline{\vec{p}_1'}$ und $\underline{\vec{p}_2'}$ sind noch unbestimmt. Diese kann man durch die beiden Winkel $\underline{\theta}$ (Streuwinkel) und $\underline{\phi}$ (Azimutalwinkel) ausdrücken. $\underline{\phi}$ beschreibt die Orientierung der Ebene, die $\underline{\vec{p}_1}$ und $\underline{\vec{p}_1'}$ (und damit $\underline{\vec{p}_2}$ und $\underline{\vec{p}_2'}$) enthält, relativ zu festen (Labor-) Achsen. Um $\underline{\theta}$ und $\underline{\phi}$ zu bestimmen, müssen wir den konkreten Streuprozess untersuchen.

Beispiel: elastischer Stoß zweier harter Kugeln. Im Laborsystem ruhe eine Kugel mit der Masse m und dem Radius r_0. Eine zweite, identische Kugel trifft mit dem Impuls $\vec{p}_2$ und dem *Stoßparameter* b (siehe Skizze) auf sie.

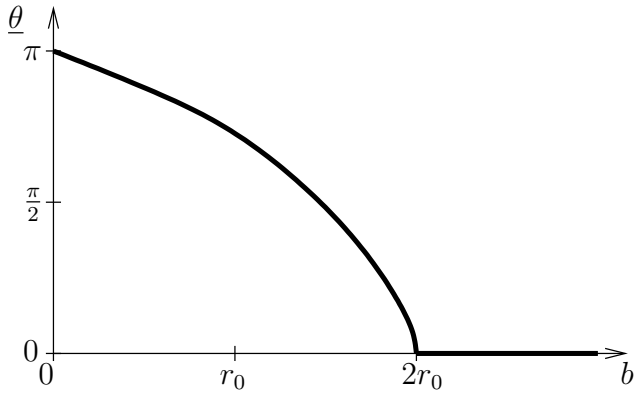


Im Schwerpunktsystem im Augenblick des Stoßes sieht die Situation wie folgt aus:



Aus Symmetriegründen gilt:

- $\underline{\vec{p}_1}, \underline{\vec{p}_2}$ und $\underline{\vec{p}_1'}, \underline{\vec{p}_2'}$ liegen in einer Ebene. Wir wählen diese als xy-Ebene und haben dann $\underline{\phi} = 0$.
- $\dfrac{b}{2r_0} = \sin\dfrac{\pi - \underline{\theta}}{2} = \cos\dfrac{\underline{\theta}}{2}$ (siehe Skizze)
  $\Rightarrow \quad \underline{\theta} = 2\arccos\dfrac{b}{2r_0}$,
  solange $b < 2r_0$ gilt.
- Im Fall $b \geq 2r_0$ verfehlen sich die Kugeln und trivialerweise gilt $\underline{\theta} = 0$.



4.5 Kleine Schwingungen

Wir betrachten nun N Teilchen unter der Wirkung rein konservativer Kräfte. Dieses System ist zu allgemein, um etwas Sinnvolles darüber sagen zu können. Wir untersuchen die spezielle, aber wichtige Situation, dass die Orte $\vec{r}_i$ der Teilchen nur wenig von einer stabilen Gleichgewichtskonfiguration $\{\vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0, \vec{r}_3^0, \ldots\}$ abweichen.

Gleichgewicht bedeutet, dass die Teilchen in der Konfiguration $\{\vec{r}_1^0, \ldots\}$ bleiben, dass also die Gesamtkraft auf jedes Teilchen verschwindet.

Stabil bedeutet, dass für kleine Auslenkungen rücktreibende Kräfte wirken.

Aufgrund der Konservativität existiert eine potentielle Energie $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$. Die Kraft $\vec{F}_i$ auf Teilchen i ist $\vec{F}_i = -\partial V/\partial \vec{r}_i$. Für ein stabiles Gleichgewicht muss V bei $\{\vec{r_1}^0, \vec{r_2}^0, \ldots\}$ ein lokales *Minimum* haben. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir Koordinaten $q_1, \ldots, q_{3N}$ ein gemäß

$$\begin{aligned}
q_1 &= x_1 - x_1^0 \\
q_2 &= y_1 - y_1^0 \\
q_3 &= z_1 - z_1^0 \\
q_4 &= x_2 - x_2^0 \\
&\vdots \\
q_{3N} &= z_N - z_N^0.
\end{aligned}$$

Wir entwickeln V um das Minimum bei $(0, 0, \ldots)$:

$$\begin{aligned}
V(q_1, q_2, \ldots) &\cong V(0,0,\ldots) + \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{0,0,\ldots} q_i}_{=0 \text{ am Minimum}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3N} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{0,0,\ldots} q_i q_j. \\
&=: V(0,0,\ldots) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3N} V_{ij}\, q_i q_j. \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

Für ein stabiles Gleichgewicht muss V ein Minimum haben. Dazu muss gelten

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}\, q_i q_j > 0 \qquad (4.63)$$

für *alle* nicht verschwindenden Auslenkungen $\{q_1, q_2, \ldots\}$. Die Matrix mit den Komponenten

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \qquad (4.64)$$

heißt *Hesse-Matrix*. Damit die Ungleichung (4.63) gilt, müssen alle Eigenwerte der Hesse-Matrix positiv sein.

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten in dieser Näherung

$$m_i \ddot{q}_i = -\sum_j V_{ij} q_j \quad \forall i. \qquad (4.65)$$

Mit dem Ansatz $q_i = \alpha_i e^{i\omega t}$ erhalten wir

$$-m_i \omega^2 \alpha_i \cancel{e^{i\omega t}} = -\sum_j V_{ij} \alpha_j \cancel{e^{i\omega t}} \quad \Rightarrow \quad \sum_j (V_{ij} - m_i \omega^2 \delta_{ij}) \alpha_j = 0. \qquad (4.66)$$

Dies lässt sich als Matrix-Gleichung schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} V_{11} - m_1\omega^2 & V_{12} & \cdots & V_{1,3N} \\ V_{21} & V_{22} - m_2\omega^2 & \cdots & V_{2,3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{3N,1} & V_{3N,2} & \cdots & V_{3N,3N} - m_{3N}\omega^2 \end{pmatrix}}_{=:D} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.67)$$

Das ist eine *verallgemeinerte Eigenwertgleichung* für den Eigenwert ω^2 mit dem Eigenvektor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. (Es wäre eine *gewöhnliche Eigenwertgleichung*, wenn $m_1 = m_2 = \ldots = m_{3N}$.) Die Matrix D ist symmetrisch, da $V_{ij} = \partial^2 V / \partial q_i \partial q_j \big|_{0,0,\ldots} = V_{ji}$ gilt. Daher sind die Lösungen für ω und $\alpha_1, \ldots$ reell. Im Ansatz $\alpha_i e^{i\omega t}$ bedeutet dies, dass es sich um ungedämpfte Oszillationen ohne Phasenverschiebung handelt.

Nicht verschwindende Lösungen für $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ existieren, wenn die Determinante der Matrix verschwindet:

$$\boxed{\det D = 0.} \tag{4.68}$$

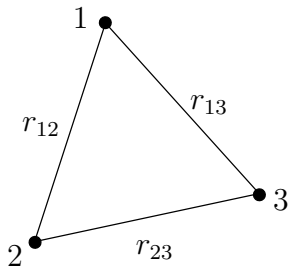
Dies ist die *Säkulargleichung*. $\det D$ ist ein Polynom $3N$-ten Grades in ω^2. Die Gleichung hat daher $3N$ Lösungen für ω^2, die teilweise zusammenfallen können. (Dies ergibt $6N$ Lösungen für $\omega = \pm\sqrt{\omega^2}$, aber das zusätzliche Vorzeichen sagt nur aus, dass wir wie beim einfachen harmonischen Oszillator für jede Kreisfrequenz $\omega > 0$ zwei unabhängige Lösungen $\sin \omega t, \cos \omega t$ erhalten.) Die Eigenvektoren $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ zu den Eigenwerten ω^2 nennt man *Normalschwingungen* oder *Eigenmoden* mit der Frequenz $\omega > 0$. Jede davon ist eine harmonische Schwingung. Die allgemeine Lösung ist die Superposition der Eigenmoden.

Kapitel 5

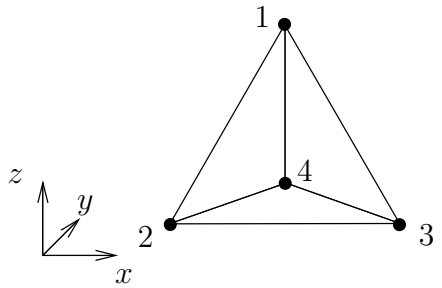
Der starre Körper

Wir wollen jetzt die Dynamik von ausgedehnten Körpern untersuchen. Ausgedehnte Körper bestehen aus vielen Teilchen, also können wir die Erkenntnisse aus Kapitel 4 anwenden. Wir interessieren uns hier aber für die Bewegung des Körpers als Einheit, nicht für Bewegungen der einzelnen Teilchen relativ zu einander, wie in Abschnitt 4.5. Daher nehmen wir näherungsweise an, dass alle Abstände $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ von Teilchen konstant sind. Diese *Zwangsbedingungen* (mehr dazu in Kapitel 6) definieren einen *starren Körper*. In einem Körper aus N Teilchen sind $3N$ Koordinaten nötig, um die Positionen aller Teilchen, also die Konfiguration, anzugeben. Wir wollen feststellen, wie viele unabhängige Gleichungen für die $3N$ Koordinaten durch die Zwangsbedingungen $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \text{const}$ gegeben sind.

- Für $N = 1$ haben wir überhaupt keine Zwangsbedingungen.
- Für $N = 2$ haben wir eine.
- Für $N = 3$ haben wir drei:



- Für $N = 4$ haben wir sechs:



- Für $N = 5$ sind es aber nicht $6 + 4 = 10$, denn für das fünfte und jedes weitere Teilchen kann man nur jeweils drei Abstände frei wählen (dies ist eine Folge des dreidimensionalen Raumes). Daher gibt es für $N = 5$ nur $6 + 3 = 9$ Zwangsbedingungen.
- Für allgemeine $N \geq 5$ gibt es analog $6 + (N - 4) \cdot 3 = 3N - 6$ Zwangsbedingungen.

Wir nehmen $N \geq 5$ an, da ein ausgedehnter Körper sicherlich viele Teilchen enthält. Dann reicht es wegen der $3N - 6$ Zwangsbedingungen aus, 6 Koordinaten anzugeben, um alle $3N$ Koordinaten festzulegen. Man sagt, ein starrer Körper hat *6 Freiheitsgrade*. Diese 6 Freiheitsgrade beschreibt man oft durch

1. die 3 Koordinaten eines ausgezeichneten, körperfesten Punktes, der der Schwerpunkt sein kann, aber nicht sein muss, und
2. 3 Winkel, die die Orientierung des Körpers im Raum beschreiben – z.B. *zwei* Polarwinkel, die die Orientierung einer körperfesten Achse gegenüber einem Inertialsystem angeben und *ein* weiterer Winkel, der die Drehung um diese Achse beschreibt. Eine andere Wahl sind die Euler-Winkel, die unten besprochen werden.

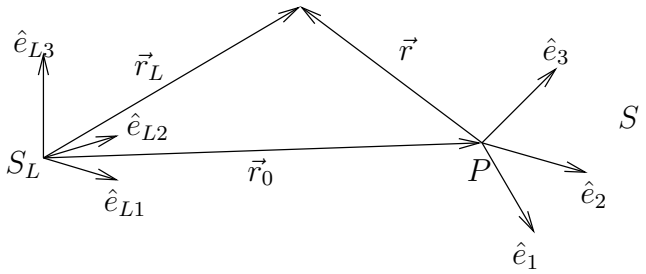
5.1 Kinematik des starren Körpers

Im Sinne der vorigen Diskussion zerlegen wir die Bewegung eines starren Körpers in die *Translation* eines körperfesten Punktes P und die *Rotation* um eine nicht unbedingt körperfeste (!) Drehachse durch P. (Dass die Drehachse nicht körperfest ist, erleben Sie z.B., wenn Sie mit dem Flugzeug fliegen.) Wir betrachten zwei Bezugssysteme

- das Laborsystem S_L, das ein Inertialsystem sei,
- das körperfeste System S mit dem Koordinatenursprung in P.

Aus Sicht von S_L habe P den Ortsvektor $\vec{r}_0(t)$. Dann gilt für die Darstellungen des Ortsvektors eines körperfesten Punktes in S_L und S:

$$\underbrace{\vec{r}_L(t)}_{\text{in } S_L} = \vec{r}_0(t) + \underbrace{\vec{r}(t)}_{\text{in } S} \tag{5.1}$$



Für die Geschwindigkeit aus Sicht von S_L gilt

$$\dot{\vec{r}}_L \equiv \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)_L}_{\text{Ableitung aus Sicht von } S_L} \vec{r}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{r}. \tag{5.2}$$

Nun erinnern wir uns an die Regel aus Abschnitt 3.7: Wenn sich S gegenüber S_L mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht, gilt

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L = \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times , \tag{5.3}$$

also

$$\dot{\vec{r}}_L = \dot{\vec{r}}_0 + \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{5.4}$$

Hier verschwindet $d\vec{r}/dt$, also die Geschwindigkeit des Punktes $\vec{r}$ aus Sicht von S, da S körperfest ist. Wir haben die Bewegung des Punktes $\vec{r}$ in eine Translation von P und eine Rotation um die durch $\vec{\omega}$ beschriebene momentane Drehachse durch P zerlegt.

Der Körper sei aus Massenpunkten mit der Masse m_i und dem Ortsvektor $\vec{r}_i$ zusammen gesetzt. Wir verwendet Gl. (5.4) für jeden dieser Ortsvektoren. Für die kinetische Energie gilt dann

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{iL}^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{=M} \dot{\vec{r}}_0^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2. \tag{5.5}$$

Der zweite Term ist gleich

$$\dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i) = M\dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{R}). \tag{5.6}$$

Es gibt nun zwei Fälle:

1. Ein Punkt des Körpers ist raumfest. Man wählt P als den raumfesten Punkt. Es folgt

$$\vec{r}_0 = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_0 = 0. \tag{5.7}$$

2. Kein Punkt ist raumfest. Man wählt P im Schwerpunkt, also

$$\vec{R} = 0 \quad \forall t. \tag{5.8}$$

In beiden Fällen verschwindet der zweite Term. Also bleibt

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \tag{5.9}$$

$$=: \underbrace{T_T}_{\text{Translation}} + \underbrace{T_R.}_{\text{Rotation}} \tag{5.10}$$

5.1.1 Der Trägheitstensor

Uns interessiert hier der Rotationsanteil, da wir den Translationsanteil bereits vollständig verstehen. Wegen $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2 \sin^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = a^2b^2(1 - \cos^2 \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ gilt

$$T_R = \frac{1}{2}\sum_i m_i\omega^2 r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega_1 x_{i1}+\omega_2 x_{i2}+\omega_3 x_{i3})^2. \tag{5.11}$$

Hier sind x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} die Komponenten von $\vec{r}_i$. T_R enthält nur Terme zweiter Ordnung in $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (man sagt, T_R ist *bilinear* in $\vec{\omega}$). Daher können wir schreiben

$$T_R = \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{3} J_{lm}\omega_l\omega_m \tag{5.12}$$

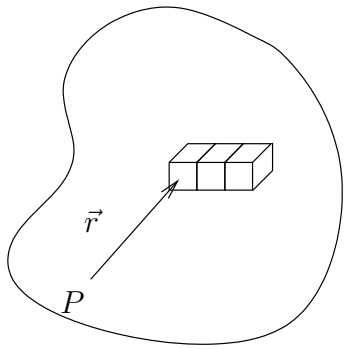
oder äquivalent, mit der Matrix $\overleftrightarrow{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}$,

$$T_R = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\overleftrightarrow{J}\vec{\omega} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)J\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Durch Vergleich mit (5.11) erhält man

$$J_{lm} = \sum_i m_i(\delta_{lm}\vec{r}_i^2 - x_{il}x_{im}) \tag{5.14}$$

mit $l, m = 1, 2, 3$. $\overleftrightarrow{J}$ heißt *Trägheitstensor*. (In der linearen Algebra ist „Tensor“ eine Verallgemeinerung des Begriffes der „Matrix“. J ist eine Matrix. Wir benötigen hier keine weitergehende Theorie für Tensoren.) Für kontinuierliche Massenverteilungen müssen wir die Summe $\sum_i$ durch ein Integral über das Volumen des Körpers ersetzen:



Das Massenelement bei $\vec{r}$ ist $dm(\vec{r}) = d^3r\,\rho(\vec{r})$ mit der Dichte $\rho(\vec{r})$. Insbesondere sind die Gesamtmasse

$$M = \sum_i m_i \quad \rightarrow \quad \int d^3r\,\rho(\vec{r}) \tag{5.15}$$

und die Tensorkomponenten

$$J_{lm} = \sum_i m_i(\delta_{lm}\vec{r}_i^2 - x_{il}x_{im}) \quad \rightarrow \quad \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,(\delta_{lm}\vec{r}^2 - x_l x_m). \tag{5.16}$$

Rotiert der Körper um eine feste Achse, beschrieben durch den Einheitsvektor $\hat{n}$, so ist $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$ und

$$T_R = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \overleftrightarrow{J}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\hat{n}^T \overleftrightarrow{J}\hat{n}\,\omega^2 =: \frac{1}{2}J\omega^2, \tag{5.17}$$

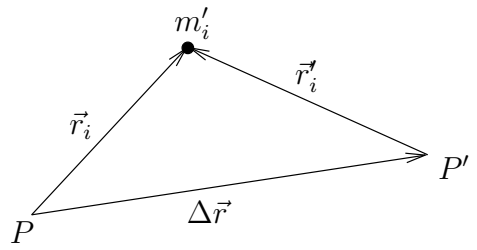
wobei wir das *Trägheitsmoment* J für die Rotation um die Achse in Richtung $\hat{n}$ eingeführt haben. Das Trägheitsmoment und allgemeiner der Trägheitstensor spielen also für Rotationen die Rolle der trägen Masse für Translationen, wo $T_T = (1/2)Mv^2$ gilt. Da $\overleftrightarrow{J}$ symmetrisch ist, hat $\overleftrightarrow{J}$ drei reelle Eigenwerte mit zueinander senkrechten Eigenvektoren. Die Eigenwerte J_1, J_2, J_3 heißen *Hauptträgheitsmomente*, die Richtungen der Eigenvektoren *Hauptträgheitsachsen*. Wählen wir diese als Koordinatenachsen des körperfesten Systems S, so nimmt $\overleftrightarrow{J}$ die einfache Form

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

an.

5.1.2 Steinerscher Satz

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl des Ursprungspunktes P ab.



Hier ist $\vec{r}_i = \Delta\vec{r} + \vec{r}_i'$.

Wir betrachten den Fall, dass P der Schwerpunkt und P' ein anderer körperfester Punkt ist. Aus

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \Delta\vec{r} \tag{5.19}$$

folgt

$$\begin{aligned}
J'_{lm} &= \sum_i m_i(\delta_{lm}(\vec{r}_i')^2 - x'_{il}x'_{im}) \\
&= \sum_i m_i\left[\delta_{lm}(\vec{r}_i - \Delta\vec{r})^2 - (x_{il} - \Delta x_l)\times(x_{im} - \Delta x_m)\right] \\
&= \sum_i m_i\left[\delta_{lm}\vec{r}_i^2 - 2\delta_{lm}\vec{r}_i\cdot\Delta\vec{r} + \delta_{lm}\Delta\vec{r}^2 - x_{il}x_{im} + x_{il}\Delta x_m + \Delta x_l x_{im} - \Delta x_l\Delta x_m\right] \\
&= \underbrace{\sum_i m_i(\delta_{lm}\vec{r}_i^2 - x_{il}x_{im})}_{J_{lm}} \\
&\quad \underbrace{-2\delta_{lm}\Delta\vec{r}\cdot\sum_i m_i\vec{r}_i - \Delta x_m\sum_i m_i x_{il} - \Delta x_l\sum_i m_i x_{im}}_{=0 \text{ da } \sum_i m_i\vec{r}_i/M = \vec{R} = 0} \\
&\quad +(\delta_{lm}\Delta\vec{r}^2 - \Delta x_l\Delta x_m)\underbrace{\sum_i m_i}_{M}\,.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Somit erhalten wir

$$\boxed{J'_{lm} = J_{lm} + M(\delta_{lm}\Delta r^2 - \Delta x_l \Delta x_m).} \tag{5.21}$$

Bezüglich einer festen, durch $\hat{n}$ gegebenen Achse folgt

$$\begin{aligned} J' &= \hat{n}^T \overleftrightarrow{J}' \hat{n} = \sum_{lm} \hat{n}_l J'_{lm} \hat{n}_m \\ &= \sum_{lm} \hat{n}_l J_{lm} \hat{n}_m + M\Big(\underbrace{\sum_l \hat{n}_l \Delta r^2 \hat{n}_l}_{=\Delta r^2} - \sum_{lm} \hat{n}_l \Delta x_l \Delta x_m \hat{n}_m \Big) \\ &= J + M\big(\Delta r^2 - (\hat{n}\cdot\Delta\vec{r})^2\big). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Steht $\Delta\vec{r}$ senkrecht auf $\hat{n}$, also auf der Drehachse, so ist

$$\boxed{J' = J + M\Delta r^2.} \tag{5.23}$$

Das ist die übliche Form des *Steinerschen Satzes*.

5.1.3 Der Drehimpuls des starren Körpers

Im Laborsystem ist der Drehimpuls

$$\vec{L}_L = \sum_i m_i \vec{r}_{iL} \times \dot{\vec{r}}_{iL}. \tag{5.24}$$

Einsetzen von Gleichung (5.4) ergibt

$$\begin{aligned} \vec{L}_L &= \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i) \times (\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ &= M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times (\vec{\omega} \times M\vec{R}) + M\vec{R} \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \end{aligned} \tag{5.25}$$

1. Fall: P ist raumfest. Dann ist $\vec{r}_0 \equiv 0$, also

$$L_L = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{L}. \tag{5.26}$$

2. Fall: P ist der Schwerpunkt. Dann ist $\vec{R} \equiv 0$, also

$$\vec{L}_L = M\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)}_{\vec{L}}. \tag{5.27}$$

Der erste Term ist der Drehimpuls des Schwerpunktes und i.A. nicht sehr interessant. Wir betrachten daher nun den *körpereigenen* Drehimpuls $\vec{L}$.

Wir können das doppelte Kreuzprodukt auflösen,

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i \right]. \tag{5.28}$$

Die x-Komponente lautet z.B.

$$L_1 = \sum_i m_i \left[(r_i^2 - x_{i1}^2)\omega_1 - x_{i1}x_{i2}\omega_2 - x_{i1}x_{i3}\omega_3 \right]. \tag{5.29}$$

Vergleich mit der Definition des Trägheitstensors $\overleftrightarrow{J}$ ergibt

$$\boxed{\vec{L} = \overleftrightarrow{J}\vec{\omega}.} \tag{5.30}$$

Also gilt auch $T_R = (1/2)\vec{\omega}^T \vec{L} \equiv (1/2)\vec{\omega} \cdot \vec{L}$.

5.2 Die Bewegungsgleichung des Kreisels

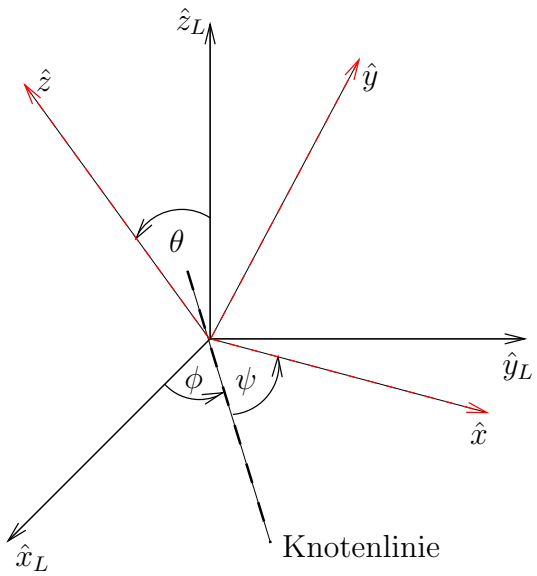
Wir bezeichnen jeden rotierenden starren Körper als *Kreisel*. Wir beschränken uns auf den 1. Fall: Ein Punkt des Kreisels sei raumfest, wir wählen diesen als Ursprung P des Laborsystems S_L *und* des körperfesten Systems S. Das ist allgemeiner als es klingt: Für einen Kreisel ohne explizit festgehaltenen Punkt, auf den aber keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig und geradlinig ($M\ddot{\vec{R}} = 0$). Das ist aber mittels einer Galilei-Transformation äquivalent zu einem ruhenden Schwerpunkt, den wir als Ursprung P von S_L und S wählen können.

5.2.1 Die Euler-Winkel

Die Bezugssysteme S_L und S haben also einen gemeinsamen Ursprung. S geht aus S_L durch eine zeitabhängige Rotation hervor. Wie erwähnt benötigen wir *drei* Winkel, um die Rotation vollständig zu beschreiben. Die übliche Wahl sind die Euler-Winkel. Das körperfeste System S mit dem Dreibein $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ geht durch drei Einzeldrehungen aus dem Laborsystem S_L mit dem Dreibein $\hat{x}_L, \hat{y}_L, \hat{z}_L$ hervor:

1. Drehung um die Achse $\hat{z}_L$ um den Winkel ϕ, die neue x-Achse nennen wir *Knotenlinie*.
2. Drehung um die Knotenlinie um den Winkel θ.
3. Drehung um die neue z-Achse ($\hat{z}$) um den Winkel ψ.

Alle Drehungen erfolgen in positiver Richtung (Rechte-Hand-Regel!).



5.2.2 Die Euler-Gleichungen

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung für den Kreisel aufstellen. Wir wissen aus Abschnitt 4.1 schon, dass $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$ gilt. Diese Beziehung gilt allerdings nur in einem Inertialsystem, z.B. im Laborsystem S_L. Genauer schreiben wir also

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{L} = \vec{M}. \tag{5.31}$$

Diese Bewegungsgleichung ist nicht sehr nützlich, denn in $\vec{L} = \overleftrightarrow{J}\vec{\omega}$ hängen sowohl $\overleftrightarrow{J}$ als auch $\vec{\omega}$ in S_L von der Zeit ab, also folgt

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)_L \overleftrightarrow{J}\right]\vec{\omega} + \overleftrightarrow{J}\left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{\omega} = \vec{M}. \tag{5.32}$$

Besser benutzen wir das körperfeste System S, in dem $\overleftrightarrow{J}$ konstant ist. Wir wissen

$$\vec{M} = \left(\frac{d}{dt}\right)_L \vec{L} = \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{\text{in } S} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \overleftrightarrow{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \overleftrightarrow{J}\vec{\omega}. \tag{5.33}$$

Wir können die Koordinatenachsen in S beliebig wählen, solange sie körperfest sind. Es ist günstig, die Hauptträgheitsachsen zu wählen. Dann ist

$$\overleftrightarrow{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{M} &\equiv \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_2\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 + \omega_2 J_3\omega_3 - \omega_3 J_2\omega_2 \\ J_2\dot{\omega}_2 + \omega_3 J_1\omega_1 - \omega_1 J_3\omega_3 \\ J_3\dot{\omega}_3 + \omega_1 J_2\omega_2 - \omega_2 J_1\omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Die drei Komponenten dieser Vektor-Gleichung,

$$M_1 = J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3, \tag{5.36}$$

$$M_2 = J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1, \tag{5.37}$$

$$M_3 = J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2, \tag{5.38}$$

sind die *Euler-Gleichungen.*

Die Euler-Gleichungen sind Differentialgleichungen von komplizierterer Struktur als die bisher betrachteten, da sie *nicht linear* in $\vec{\omega}$ sind.

Zur Erinnerung: $\vec{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers (und von S) gegenüber dem *Laborsystem* S_L. (Gegenüber dem körperfesten System S rotiert der Körper natürlich gar nicht.) Wir haben aber bei der Herleitung angenommen, dass $\vec{\omega}$ in Koordinaten des *körperfesten Systems* S gegeben ist. Das vereinfacht die Herleitung erheblich, macht $\vec{\omega}$ aber recht unanschaulich.

Wir wollen letztlich die Bewegung in Labosystem S_L beschreiben. Die Euler-Winkel drücken die momentane Orientierung des Körpers in S_L aus. Wir müssen herausfinden, wie die Änderung der Euler-Winkel mit $\vec{\omega}$ zusammenhängt. Wir betrachten eine infinitesimale Drehung $\vec{\omega}\,dt$. Diese setzt sich zusammen aus infinitesimalen Änderungen der Euler-Winkel:

1. $d\phi$ um $\hat{z}_L$,
2. $d\theta$ um die Knotenlinie (diese werde mit $\hat{k}$ bezeichnet),
3. $d\psi$ um $\hat{z}$.

Also ist $\vec{\omega}\,dt = d\phi\,\hat{z}_L + d\theta\,\hat{k} + d\psi\,\hat{z}$. Jetzt müssen wir $\hat{z}_L$ und $\hat{k}$ noch durch die Richtungsvektoren $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ von S ausdrücken. Wir wollen das hier nicht im Einzelnen nachvollziehen, aber man kann an der Skizze auf Seite 52 ablesen, dass gilt

$$\hat{k} = \cos\psi\hat{x} - \sin\psi\hat{y} \tag{5.39}$$

$$\hat{z}_L = \sin\theta\sin\psi\hat{x} + \sin\theta\cos\psi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}. \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec{\omega}dt &= (d\phi\sin\theta\sin\psi + d\theta\cos\psi)\hat{x} \\ &+ (d\phi\sin\theta\cos\psi - d\theta sin\psi)\hat{y} \\ &+ (d\phi\cos\theta + d\psi)\hat{z}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Damit folgen die gesuchten Gleichungen,

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \tag{5.42}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \tag{5.43}$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}. \tag{5.44}$$

Hat man also $\vec{\omega}(t)$ aus den Euler-Gleichungen bestimmt, kann man diese drei gekoppelten Differentialgleichungen für $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ lösen. Das wird i.A. nicht einfach sein, da die Gleichungen die gesuchten Funktionen in trigonometrischen Funktionen enthalten. Die Lösung ergibt die Bewegung des Körpers im Laborsystem.

5.3 Der kräftefreie Kreisel

Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall, in dem kein Drehmoment wirkt: $\vec{M} = 0$. Dann spricht man etwas irreführend vom kräftefreien Kreisel. Schon dieser Fall ist überraschend komplex.

Die Euler-Gleichungen lauten hier

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= 0, && (5.45)\\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= 0, && (5.46)\\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= 0. && (5.47) \end{aligned}$$

Multiplikation mit ω_1, ω_2 bzw. ω_3 und Addition ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= J_1\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3\omega_3\dot{\omega}_3 + \cancel{(J_3 - J_2 + J_1 - J_3 + J_2 - J_1)}\,\omega_1\omega_2\omega_3\\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2\right)\\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\vec{\omega}^T\overleftrightarrow{J}\vec{\omega} = \frac{d}{dt}T_R. && (5.48) \end{aligned}$$

Wir haben also den Energieerhaltungssatz wieder gewonnen, ein nicht überraschendes Ergebnis.

Multiplizieren wir die Euler-Gleichugnen stattdessen mit $J_1\omega_1$, $J_2\omega_2$ bzw. $J_3\omega_3$ und addieren sie, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= J_1^2\omega_1\dot{\omega}_1 + J_2^2\omega_2\dot{\omega}_2 + J_3^2\omega_3\dot{\omega}_3 + \cancel{(J_1J_3 - J_1J_2 + J_2J_1 - J_2J_3 + J_3J_2 - J_3J_1)}\,\omega_1\omega_2\omega_3\\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2\right)\\ &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\vec{\omega}^T\overleftrightarrow{J}\overleftrightarrow{J}\vec{\omega}\right) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\vec{L}^T\vec{L} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}L^2. && (5.49) \end{aligned}$$

Also ist das Quadrat oder äquivalent der *Betrag* des Drehimpulses im körperfesten System S erhalten. Das ist nicht trivial; wir wussten bisher nur, dass der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ im Inertialsystem S_L erhalten ist, aber nichts über das System S.

5.3.1 Rotation um freie Achsen

Wir untersuchen nun, ob es vorkommen kann, dass $\vec{L}$ als *Vektor* in S erhalten ist, nicht nur betragsmäßig. Zu diesem Zweck nehmen wir vorläufig an, dass dies möglich ist, und prüfen die Konsequenzen.

Damit $\vec{L}$ erhalten ist, müsste $0 = \dot{\vec{L}} = \overleftrightarrow{J}\dot{\vec{\omega}}$ gelten, also $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Aus den Euler-Gleichungen folgt dann

$$\begin{aligned} (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= 0, && (5.50)\\ (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 &= 0, && (5.51)\\ (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= 0. && (5.52) \end{aligned}$$

Sind J_1, J_2, J_3 alle verschieden (unsymmetrischer Kreisel – für reale Kreisel immer gegeben), so müssen daher *zwei* Komponenten von $\vec{\omega}$ verschwinden. (Verschwinden alle drei, so gibt es gar keine Rotation.) D.h. die Drehachse (parallel zu $\vec{\omega}$) ist parallel zu einer der Hauptträgheitsachsen und damit körperfest. Wegen $\vec{L} = \overleftrightarrow{J}\vec{\omega}$ ist $\vec{L}$ dann auch parallel zu derselben Achse und körperfest. $\vec{L}$ ist aber im Laborsystem S_L erhalten. Daher ist die Rotationsachse auch in S_L fest.

Ist diese Bewegung stabil? Dazu betrachten wir eine Rotation, die fast um eine Hauptträgheitsachse erfolgt. O.B.d.A. sei dies die 1-Achse. Dann nehmen wir an, dass gilt $\omega_1 = \omega_1^0 + \Delta\omega_1$, $\omega_2 = \Delta\omega_2$, $\omega_3 = \Delta\omega_3$, wobei $(\omega_1^0, 0, 0) = \text{const}$ eine Rotation um die 1-Achse beschreibt, und $|\Delta\omega_1|, |\Delta\omega_2|, |\Delta\omega_3| \ll \omega_1^0$.

Die Euler-Gleichungen lauten näherungsweise, bis zur ersten Ordnung in $\Delta\omega_i$,

$$\begin{aligned} \cancel{J_1\dot{\omega}_1^0} + J_1\Delta\dot{\omega}_1 &= 0, && (5.53)\\ J_2\Delta\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\Delta\omega_3\omega_1^0 &= 0, && (5.54)\\ J_3\Delta\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1^0\Delta\omega_2 &= 0. && (5.55)\\ & && (5.56) \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\Delta\omega_1 = \text{const}$ und aus den beiden übrigen Gleichungen

$$\Delta\dot{\omega}_2 = \frac{J_1 - J_3}{J_2}\,\omega_1^0 \Delta\omega_3, \tag{5.57}$$

$$\Delta\dot{\omega}_3 = \frac{J_2 - J_1}{J_3}\,\omega_1^0 \Delta\omega_2. \tag{5.58}$$

Also

$$\Delta\ddot{\omega}_2 = \frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3}\,(\omega_1^0)^2 \Delta\omega_2, \tag{5.59}$$

$$\Delta\ddot{\omega}_3 = \frac{(J_2 - J_1)(J_1 - J_3)}{J_3 J_2}\,(\omega_1^0)^2 \Delta\omega_3. \tag{5.60}$$

Diese Gleichungen sind entkoppelt und analog zu harmonischen Oszillatoren. Wie dort ist die Bewegung stabil, wenn die „Kraft“ rücktreibend ist, d.h. wenn gilt

$$\frac{(J_1 - J_3)(J_2 - J_1)}{J_2 J_3}\,(\omega_1^0)^2 < 0, \tag{5.61}$$

oder äquivalent,

$$(J_2 - J_1)(J_3 - J_1) > 0. \tag{5.62}$$

Das ist der Fall, wenn $J_2, J_3 > J_1$ *oder* $J_2, J_3 < J_1$ gilt, wenn J_1 das kleinste oder das größte Hauptträgheitsmoment ist. Ist es dagegen das mittlere, ist die Bewegung instabil. Das kann man mit einem Quader ausprobieren.

5.3.2 Der symmetrische Kreisel

Wir haben im letzten Abschnitt die Rotation eines kräftefreien unsymmetrischen Kreisels um eine freie Achse untersucht. Die Lösung für einen kräftefreien unsymmetrischen Kreisel, der nicht um eine freie Achse rotiert, ist aufwändig. Wir betrachten hier den einfacheren Fall des symmetrischen Kreisels mit

$$J_1 = J_2 \neq J_3. \tag{5.63}$$

(Der noch einfachere Fall des Kugelkreisels, $J_1 = J_2 = J_3$, ist langweilig, da immer $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$, d.h. die momentane Drehachse, parallel sind.) Die ausgezeichnete Hauptträgheitsachse, hier die 3-Achse, heißt *Figurenachse*. Beispiel: Ist der Körper ein *Rotationskörper*, so ist die Symmetrieachse die Figurenachse.

Die Euler-Gleichungen lauten

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_1)\omega_2\omega_3 = 0, \tag{5.64}$$

$$J_1\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = 0, \tag{5.65}$$

$$J_3\dot{\omega}_3 + \cancel{(J_1 - J_1)\omega_1\omega_2} = 0. \tag{5.66}$$

Offenbar gilt $\omega_3 = \text{const} =: \omega_3^0$. Wir wählen das körperfeste System S o.B.d.A. so, dass $\omega_3^0 > 0$ ist. Die ersten beiden Euler-Gleichungen sind

$$\dot{\omega}_1 - \underbrace{\frac{J_1 - J_3}{J_1}\omega_3^0}_{=:\,\Omega}\,\omega_2 = 0, \tag{5.67}$$

$$\dot{\omega}_2 + \underbrace{\frac{J_1 - J_3}{J_1}\omega_3^0}_{=\,\Omega}\,\omega_1 = 0. \tag{5.68}$$

Es folgt

$$\ddot{\omega}_1 - \Omega\dot{\omega}_2 = \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0 \tag{5.69}$$

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega\dot{\omega}_1 = \ddot{\omega}_2 + \Omega^2\omega_2 = 0 \tag{5.70}$$

Das sind wieder Gleichungen analog zu harmonischen Oszillatoren. Der Ansatz

$$\omega_1 = \alpha\sin(\Omega t + \beta) \tag{5.71}$$

erfüllt die erste Gleichung. Dann ist

$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega} = \alpha \cos(\Omega t + \beta). \tag{5.72}$$

Insgesamt also:

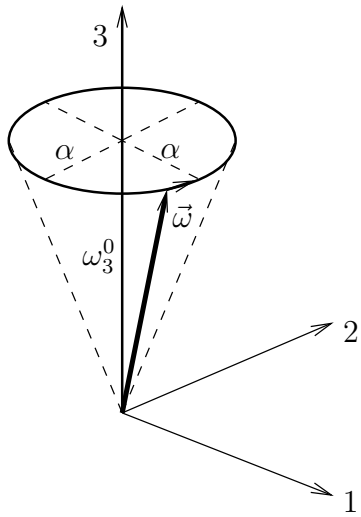
$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha \cos(\Omega t + \beta) \\ \omega_3^0 \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

mit

$$\Omega = \frac{J_1 - J_3}{J_1}\, \omega_3^0 \tag{5.74}$$

und ω_3^0, α, β beliebig. Das ist die allgemeine Lösung, denn wir hatten *drei* Gleichungen *erster* Ordnung, die *drei* unabhängige Parameter erfordern.

Im körperfesten System S können wir $\vec{\omega}$ wie folgt darstellen:



$\vec{\omega}$ läuft auf einem Kegelmantel, dem *Polkegel*, um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um. $\Omega > 0$ bzw. $\Omega < 0$ bedeuten Umlauf im positiven bzw. negativen Drehsinn.

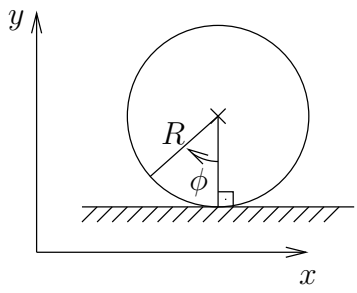
Beispiel: Die Erde ist annähernd ein abgeflachtes („oblates“) Rotationsellipsoid, also $J_3 < J_1 \approx J_2$. Man beobachtet, dass die momentane Drehachse ($\vec{\omega}$) nicht mit der Figurenachse zusammenfällt. $\vec{\omega}$ rotiert um die Figurenachse mit der Periode $T = 2\pi/\Omega \approx 433\,\mathrm{d}$. Der Abstand der Achsen in Bodenhöhe ist etwa 10 m.

Nun kann man die Gleichungen aus dem vorigen Abschnitt lösen, um die Euler-Winkel $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ zu erhalten. Das führen wir hier nicht explizit durch, die Rechnung ist in den meisten Lehrbüchern zu finden. Im Ergebnis rotiert die Figurenachse in S_L auf einem Kegelmantel (*Nutationskegel*) um den konstanten Drehimpuls $\vec{L}$. Der Winkel $\theta_0 = \text{const}$ zwischen $\vec{L}$ und Figurenachse erfüllt $\tan\theta_0 = \alpha J_1/(\omega_3^0 J_3)$ und die Winkelgeschwindigkeit der Figurenachse ist dann $\alpha/\sin\theta_0$.

Kapitel 6

Lagrange-Mechanik

Wir hatten beim starren Körper bereits *Zwangsbedingungen* kennengelernt: Die Abstände aller Massenpunkte sind hier konstant, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{const}$. Ein weiteres Beispiel ist ein auf einer Ebene rollendes Rad in zwei Dimensionen:



Ein starrer Körper in zwei Dimensionen hat *drei* Freiheitsgrade, z.B. die Koordinaten x, y des Mittelpunktes und den Drehwinkel ϕ einer körperfesten Achse gegenüber der y-Achse. Das rollende Rad unterliegt aber zwei Zwangsbedingungen:

1. Der Mittelpunkt hat immer den gleichen Abstand von der Ebene. In unserem Koordinatensystem gilt also
$$y = y_0 = \text{const.} \tag{6.1}$$

2. Der Auflagepunkt des Rades gleitet nicht, ist also momentan in Ruhe. Dann gilt die Rollbedingung
$$\dot{x} = R\dot{\phi}, \tag{6.2}$$
die wir integrieren können zu
$$x = R\phi. \tag{6.3}$$
(Hier müssen wir offenbar beliebige reelle Werte für ϕ zulassen.)

Damit ist nur *eine* Größe unabhängig, z.B. x oder ϕ. Es wäre sehr nützlich, Systeme mit Zwangsbedingungen direkt unter Verwendung der unabhängigen Größen beschreiben zu können, ohne von den Newtonschen Gleichungen
$$m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ex}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \tag{6.4}$$
ausgehen zu müssen. Auch falls gar keine Zwangsbedingungen vorliegen, wäre es oft nützlich, die Bewegungsgleichungen direkt in nicht-kartesischen Koordinaten oder in einem beschleunigten Bezugssystem hinschreiben zu können. Diese Anforderungen erfüllt die Lagrangesche Formulierung der klassischen Mechanik.

Anders als die Newtonschen Bewegungsgleichungen behält die Lagrangesche Formulierung auch außerhalb der klassischen Teilchen-Mechanik (Feldtheorie, Quantenmechanik) einen Sinn.

Innerhalb der klassischen Mechanik ist sie der Newton-Mechanik äquivalent, d.h. sie enthält keine „neue Physik“. Diese Aussage ist mit Vorsicht zu interpretieren: In realen Körpern sind die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ zwischen den Teilchen gar nicht klassisch beschreibbar, die makroskopische Dynamik kann aber sehr wohl klassisch im Rahmen der Lagrange-Mechanik beschrieben werden. In diesem Fall existiert kein klassisches System von Massenpunkten, das durch äquivalente Newtonsche Gleichungen beschrieben würde.

6.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte

Wir definieren zunächst zwei zentrale Begriffe: *Zwangsbedingungen* sind geometrische Bedingungen, die die Bewegung einschränken. *Zwangskräfte* sind die Kräfte, die in den Bewegungsgleichungen für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen. Beispiele sind Auflagekräfte (Fußboden auf Schuhsohlen) und Fadenspannungen (Fadenpendel).

Wenn wir ein mechanisches System mit Zwangsbedingungen durch Newtonsche Bewegungsgleichungen zu beschreiben versuchen, stoßen wir auf zwei Probleme:

- Wir kennen die Zwangskräfte gar nicht explizit.
- Die Koordinaten der einzelnen Teilchen sind nicht unabhängig.

Um Fortschritte zu machen, ist es sinnvoll, das Problem möglichst genau zu verstehen. Daher untersuchen wir zunächst, welche Typen von Zwangsbedingungen auftreten können.

6.1.1 Holonome Zwangsbedingungen

Eine naheliegende Klasse von Zwangsbedingungen sind solche, die sich als Gleichungen für die Koordinaten und evtl. die Zeit schreiben lassen:

$$f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \tag{6.5}$$

für $\nu = 1, \ldots, p$ (p ist hier die Anzahl der Zwangsbedingungen dieser Form). Man unterscheidet

- *holonom-skleronome* Zwangsbedingungen: diese hängen nicht explizit von der Zeit ab, $\partial f_\nu / \partial t \equiv 0$,
- *holonom-rheonome* Zwangsbedingungen: diese hängen explizit von der Zeit ab, $\partial f_\nu / \partial t \not\equiv 0$.

Beispiele:

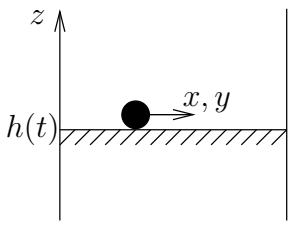
- starrer Körper: holonom-skleronom,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - c_{ij} =: f_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots) = 0 \tag{6.6}$$

  mit $i, j = 1, 2, \ldots, N, \quad i \neq j$.

- Teilchen im Aufzug (das Teilchen soll nicht abheben): holonom-rheonom,

$$z = h(t) \quad \Rightarrow \quad z - h(t) =: f(\vec{r}, t) = 0. \tag{6.7}$$



Alle holonomen Zwangsbedingungen reduzieren die Anzahl der unabhängigen Koordinaten. Existieren bei N Teilchen mit $3N$ Koordinaten nämlich p unabhängige holonome Zwangsbedingungen

$$f_\nu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N; t) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, p, \tag{6.8}$$

so kann man p Koordinaten mittels dieser Gleichungen durch die übrigen ausdrücken und es bleiben

$$S = 3N - p \tag{6.9}$$

Koordinaten übrig.

6.1.2 Nicht-holonome Zwangsbedingungen

Das sind natürlich gerade solche Zwangsbedingungen, die sich nicht als $f_\nu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N, t) = 0$ schreiben lassen und die daher die Anzahl der Koordinaten nicht reduzieren.

(a) Eine wichtige Klasse sind Zwangsbedingungen in der Form von *Ungleichungen*

$$g(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) \geq 0. \tag{6.10}$$

Beispiel 1: Skispringer. Beispiel 2: Teilchen im schnell beschleunigten Aufzug. Die Beschleunigung des Aufzugs kann $\ddot{h} < -g$ sein, er beschleunigt dann mit mehr als Erdbeschleunigung nach unten, das Teilchen kann vom Boden abheben. Also gilt nur

$$z \geq h(t) \quad \Leftrightarrow \quad z - h(t) =: g(\vec{r}; t) \geq 0. \tag{6.11}$$

In beiden Beispielen ergibt sich eine Lösungsmöglichkeit daraus, dass entlang der Bahn stückweise eine holonome Zwangsbedingung $g = 0$ gilt und stückweise gar keine. Man kann die beiden Fälle getrennt betrachten und die Lösungen aneinander setzen.

(b) Eine zweite Klasse sind Zwangsbedingungen in *differentieller*, nicht integrierbarer Form, also

$$\delta f_\nu := \vec{a}_{\nu 1} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{a}_{\nu 2} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + b_\nu dt = 0, \quad \nu = 1, \dots, p, \tag{6.12}$$

wobei die $\vec{a}_{\nu n}$ und b_ν selbst Funktionen von $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t$ sein können. „Nicht integrierbar“ bedeutet, dass δf_ν kein totales Differential ist. D.h. es gibt keine Funktion $f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, so dass

$$\vec{a}_{\nu 1} = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_1}, \vec{a}_{\nu 2} = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_2}, \dots, b_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial t} \tag{6.13}$$

gilt. Denn sonst wäre

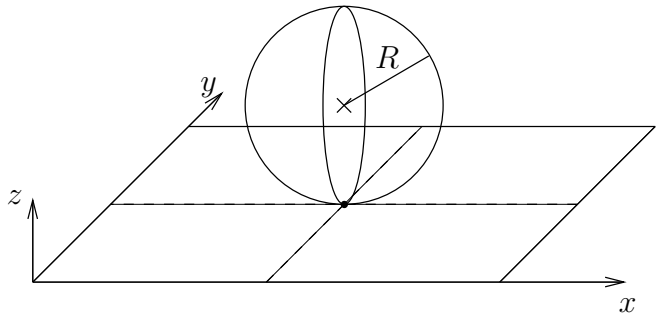
$$\delta f_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_1} \cdot d\vec{r}_1 + \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_2} \cdot d\vec{r}_2 + \dots + \frac{\partial f_\nu}{\partial t} dt = df_\nu \tag{6.14}$$

doch ein totales Differential und aus $df_\nu = 0$ würde folgen, dass

$$f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \text{const} \tag{6.15}$$

und wir hätten doch eine holonome Zwangsbedingung.

Beispiel: rollende Kugel auf Ebene.



Wir haben eine holonome Zwangsbedingung für den Mittelpunkt $\vec{r}$ der Kugel: $z = R$. Die Rollbedingungen lauten:

- in x-Richtung: $\dot{x} = R\omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad dx - R\omega_2 dt = 0$,
- in y-Richtung: $\dot{y} = -R\omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad dy + R\omega_1 dt = 0$,

wobei $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ die Winkelgeschwindigkeit der Kugel im *Laborsystem* ist. $\vec{\omega}$ ist selbst i.A. zeitabhängig und man kann die Rollbedingungen nicht allgemein integrieren, um holonome Zwangsbedingungen zu erhalten.

Anschaulich können wir das verstehen: Wären die Zwangsbedingungen integrabel, so könnten wir von den verbliebenen unabhängigen Größen x, y, ϕ, θ, ψ (Euler-Winkel) zwei, z.B. x, y, durch die anderen ausdrücken. Wir wissen aber aus Erfahrung, dass das nicht geht: Wir können eine Kugel so bewegen, dass sie in jeder beliebigen Orientierung (ϕ, θ, ψ) an jedem beliebigen Punkt (x, y) endet.

6.2 Generalisierte Koordinaten

Wir beschränken uns von nun an auf holonome Zwangsbedingungen. Bei p Zwangsbedingungen haben wir $S = 3N - p$ unabhängige Koordinaten. Es ist oft sinnvoll, nicht S kartesische Koordinaten in einem Inertialsystem zu wählen. Wir wollen daher eine Formulierung der Mechanik entwickeln, die die Konfiguration durch beliebige *generalisierte Koordinaten* $q_1, q_2, \ldots, q_S$ beschreibt, die nur

- die Konfiguration *eindeutig* beschreiben und
- unabhängig sein

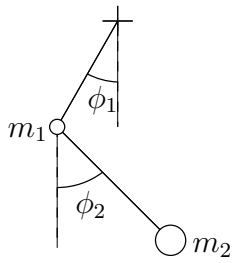
müssen. Wegen der Eindeutigkeit gilt $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_S; t)$, für $i = 1, \ldots, N$.

Definition: Die Ableitungen $\dot{q}_j$ heißen *generalisierte Geschwindigkeiten.*

Definition: Der *Konfigurationsraum* ist die Menge aller möglichen $(q_1, \ldots, q_S)$, die die Konfiguration *eineindeutig* (bijekiv) beschreiben. Das muss nicht der $\mathbb{R}^S$ sein, da einige q_j z.B. Winkel sein können.

Beispiele:

- starrer Körper: geeignete generalisierte Koordinaten sind der Schwerpunkt und die Euler-Winkel. [Für mathematisch Interessierte: der Konfigurationsraum ist (isomorph zu) $\mathbb{R}^3 \otimes \mathrm{SO}(3)$, wobei SO(3) die Gruppe der Drehungen in drei Dimensionen ist.]
- ebenes Doppelpendel:



  Günstige generalisierte Koordinaten sind ϕ_1 und ϕ_2. Der Konfigurationsraum ist $[0, 2\pi[\otimes[0, 2\pi[$.

- Teilchen im Zentralkraftfeld: geeignete generalisierte Koordinaten sind die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ. Dieses Beispiel zeigt, dass generalisierte Koordinaten auch ohne Zwangsbedingungen sinnvoll sein können.

6.3 Das d'Alembertsche Prinzip

Unser Ziel ist die Herleitung der allgemeinen Bewegungsgleichung für die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_S$. Die einzige Bewegungsgleichung, die wir bisher kennen, ist Newtons 2. Axiom

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{6.16}$$

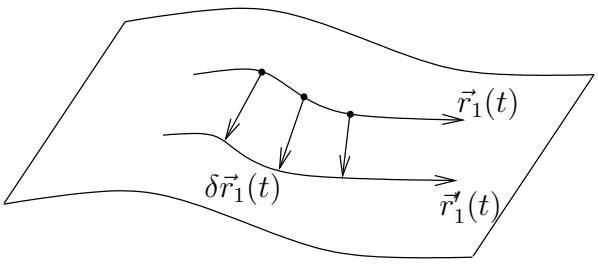
(für konstante Massen). Davon müssen wir also ausgehen. Wir schreiben

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i \tag{6.17}$$

mit der Zwangskraft $\vec{Z}_i$ und der *treibenden Kraft* $\vec{K}_i := \vec{F}_i - \vec{Z}_i$. Unser Problem ist, dass wir zwar die Zwangsbedingungen kennen, aber nicht die Zwangskräfte $\vec{Z}_i$. Da wir die Zwangsbedingungen kennen, können wir alle mit ihnen vereinbaren Bewegungen $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots$ der Teilchen angeben, wissen aber noch nicht, welche davon die richtige ist. Seien nun $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \ldots$ und $\vec{r}'_1(t), \vec{r}'_2(t), \ldots$ zwei mit den Zwangsbedingungen verträgliche Bewegungen, die sich nur um infinitesimale Größen

$$\delta\vec{r}_i(t) := \vec{r}'_i(t) - \vec{r}_i(t) \tag{6.18}$$

unterscheiden. Diese nennt man *virtuelle Verrückungen*, was, zusammen mit dem Symbol „δ“, ausdrücken soll, dass es *nicht* infinitesimale Verschiebungen *entlang* der Bahn sind.



Nun ist es plausibel, dass die Zwangskräfte unter virtuellen Verrückungen keine Arbeit leisten, $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ für alle Zeiten t. Wir betrachten z.B. einen auf einer Oberfläche gleitenden Körper: Die Zwangskraft ist die *Normal*kraft $\vec{F}_N$ und die virtuellen Verrückungen, die ja die Zwangsbedingungen respektieren, liegen *tangential* zur Oberfläche, also $\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = \vec{F}_N \cdot \delta\vec{r} = 0$. Diese Aussage ist das wichtige *Prinzip der virtuellen Arbeit*,

$$\boxed{\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall t.} \tag{6.19}$$

Man kann dieses Prinzip nicht aus den Newtonschen Axiomen herleiten, und z.B. Kuypers bezeichnet es deshalb als ein zusätzliches Axiom. Es ist aber eigentlich offensichtlich, dass es nicht aus den Newtonschen Axiomen hergeleitet werden kann, weil die Newton-Mechanik das Konzept der Zwangskraft gar nicht kennt. Man kann das Prinzip der virtuellen Arbeit als *Teil der Definition der Zwangskraft* für holonome Zwangsbedingungen ansehen.

Wegen $\dot{\vec{p}}_i = \vec{K}_i + \vec{Z}_i$ folgt sofort das *d'Alembertsche Prinzip*

$$\boxed{\sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall t.} \tag{6.20}$$

Wir haben damit die unbekannten Zwangskräfte aus der Beschreibung eleminiert. Allerdings können wir praktisch noch nicht viel damit anfangen, weil die $3N$ Komponenten der $\delta\vec{r}_i$ wegen der p Zwangsbedingungen nicht unabhängig sind. Daher führen wir jetzt generalisierte Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_S$ ein, wobei $S = 3N - p$.

Aus $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_S; t)$, $i = 1, \ldots, N$, folgt

$$\dot{\vec{r}}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}. \tag{6.21}$$

Hierin sind $\partial\vec{r}_i/\partial q_j$ und $\partial\vec{r}_i/\partial t$ Funktionen von $q_1, \ldots, q_S$ und t, aber nicht von $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S$. Also erhalten wir die $\dot{\vec{r}}_i$ als Funktionen $\dot{\vec{r}}_i(q_1, \ldots, q_S; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S; t)$. Diese Funktion ist *linear* in den $\dot{q}_j$. Aus Gleichung (6.21) lesen wir ab

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{6.22}$$

Aus $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_S; t)$ folgt andererseits für die virtuellen Verrückungen, bei denen die Zeit ja nicht verändert wird,

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{6.23}$$

Damit wird der erste Term im d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{S} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j \tag{6.24}$$

mit den *generalisierten Kräften*

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{6.25}$$

Für *konservative* Kraftfelder gilt insbesondere

$$\vec{K}_i = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i} \quad \text{mit} \quad V = V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \tag{6.26}$$

und damit

$$Q_j = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad j = 1, \ldots, S. \tag{6.27}$$

Für konservative Kräfte sind die generalisierten Kräfte also durch die Änderungen der potentiellen Energie mit den generalisierten Koordinaten gegeben.

Der 2. Term im d'Alembertschen Prinzip lautet

$$-\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_i \sum_j m_i \underbrace{\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}} \delta q_j. \tag{6.28}$$

Der unterklammerte Ausdruck ist

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i^2\right). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Nun ist die kinetische Energie $T = \sum_i (1/2) m_i \dot{\vec{r}}_i^2$, also ergibt sich

$$-\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_j \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\} \delta q_j. \tag{6.30}$$

Das gesamte d'Alembertsche Prinzip lautet also

$$0 = \sum_i (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j \left\{Q_j - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\} \delta q_j$$

und schließlich

$$\boxed{\sum_{j=1}^{S} \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right\} \delta q_j = 0} \qquad \textit{d'Alembertsches Prinzip.} \tag{6.31}$$

Nun wollen wir uns hier auf holonome Zwangsbedingungen beschränken. Dann sind die Koordinaten q_j unabhängig voneinander. Ihre Variationen (virtuellen Verrückungen) δq_j können also unabhängig voneinander gewählt werden. Aus dem d'Alembertschen Prinzip folgt dann, dass alle Koeffizienten verschwinden müssen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0, \quad j = 1, \ldots, S \tag{6.32}$$

(Z.B. können wir alle δq_j bis auf eines gleich Null setzen. Daraus folgt, dass im d'Alembertschen Prinzip jeder Summand für sich verschwinden muss.)

Wir haben jetzt ein Teilziel erreicht: Die Bewegungsgleichungen sind explizit für die S unabhängigen generalisierten Koordinaten formuliert und enthalten die Zwangskräfte nicht mehr. Bevor wir Beispiele betrachten, schränken wir uns noch auf den Spezialfall konservativer Kräfte ein.

6.4 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen

Wir haben schon gesehen, dass für konservative Kraftfelder gilt

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{6.33}$$

Außerdem hängt das Potential nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}_i$ bzw. $\dot{q}_j$ ab, also gilt

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0. \tag{6.34}$$

Mit dem d'Alembertschen Prinzip folgt

$$\sum_j \left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V)\right\} \delta q_j = 0 \tag{6.35}$$

und für holonome Zwangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-V) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-V) = 0, \quad j = 1, \ldots, S. \tag{6.36}$$

Wir definieren die *Lagrange-Funktion*

$$\boxed{L := T - V} \tag{6.37}$$

oder ausführlicher

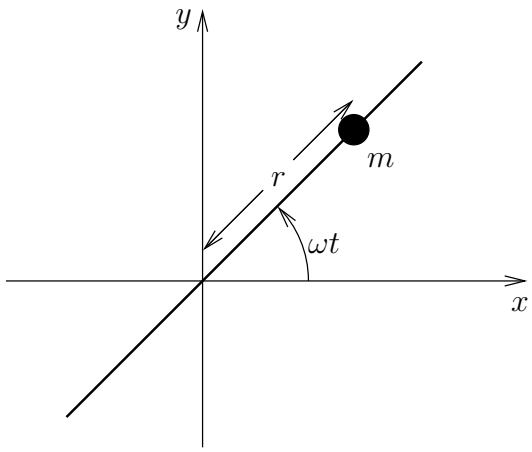
$$L(q_1, \ldots, q_S; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S; t) := T(q_1, \ldots, q_S; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S; t) - V(q_1, \ldots, q_S). \tag{6.38}$$

Damit erhalten wir die *Lagrange-Gleichungen 2. Art*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, S.} \tag{6.39}$$

(Offenbar gibt es auch Lagrange-Gleichungen 1. Art. Diese sind bei nicht holonomen Zwangsbedingungen in Differentialform nützlich.) Die Lagrange-Gleichungen sind S Differentialgleichungen 2. Ordnung (!) für die $q_j(t)$. Die allgemeine Lösung enthält demnach $2S$ freie Parameter. Wir brauchen also z.B. $2S$ Anfangsbedingungen, um eine spezielle Lösung festzulegen.

Beispiele: 1. Gleitende Perle auf gleichförmig rotierendem Draht:



Die Zwangsbedingungen sind $z = 0$ und $y = x \tan \omega t$. Damit ist $S = 1$. Eine geeignete generalisierte Koordinate ist $q = r$. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \tag{6.40}$$

vgl. Abschnitt 2.1. Also ist hier

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2\omega^2). \tag{6.41}$$

Mit $V \equiv 0$ wird

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2\omega^2) \tag{6.42}$$

und die Lagrange-Gleichung für q lautet

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}m\dot{q} - m\omega^2 q = m\ddot{q} - m\omega^2 q \tag{6.43}$$

und schließlich

$$\ddot{q} = \omega^2 q. \tag{6.44}$$

Diese Gleichung ist *nicht* analog zum harmonischen Oszillator, da die generalisierte Kraft nicht rücktreibend ist. Wir lösen sie mit dem Ansatz $q = e^{\lambda t}$. Es folgt $\lambda^2 = \omega^2$ und $\lambda = \pm\omega$. Die allgemeine Lösung ist

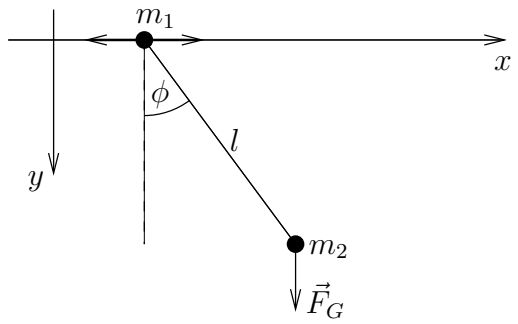
$$q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \tag{6.45}$$

Z.B. für die Anfangsbedingungen $q(0) = r(0) = r_0 > 0$ und $\dot{q}(0) = 0$ folgt $A + B = r_0$ und $A - B = 0$, also $A = B = r_0/2$ und damit

$$q(t) = r_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = r_0 \cosh \omega t. \tag{6.46}$$

Die Perle bewegt sich also beschleunigt vom Ursprung fort, obwohl gar keine treibende Kraft vorhanden ist. Die Beschleunigung muss daher aufgrund der Zwangskräfte erfolgen. Bei rheonomen Zwangsbedingungen ist das i.A. möglich.

2. Pendel mit gleitender Aufhängung:



Zwangsbedingungen: $z_1 = z_2 = 0$, $y_1 = 0$ und $(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0$. Wir erhalten $S = 6 - 4 = 2$ unabhängige Koordinaten. Wir wählen $q_1 = x_1$ und $q_2 = \phi$. Dann ist

$$x_2 = q_1 + l \sin q_2, \tag{6.47}$$

$$y_2 = l \cos q_2. \tag{6.48}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{q}_2^2 + 2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2) \end{aligned} \tag{6.49}$$

und

$$V = -m_2 g l \cos q_2. \tag{6.50}$$

Also ist

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{q}_2^2 + m_2 l \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 + m_2 g l \cos q_2. \tag{6.51}$$

Wir können jetzt sofort die Lagrange-Gleichungen für q_1 und q_2 hinschreiben. Sie lassen sich mit etwas Mühe in geschlossener Form lösen. Wir stellen hier nur fest, dass L gar nicht von q_1 selbst abhängt, nur von $\dot{q}_1$. Damit ist die Lagrange-Gleichung für q_1 relativ einfach:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2 \right]. \tag{6.52}$$

Also ist

$$(m_1 + m_2) \dot{q}_1 + m_2 l \dot{q}_2 \cos q_2 = \text{const} \tag{6.53}$$

eine *Erhaltungsgröße*. Diese erlauben Einsicht in das gegebene Problem und sind nützlich bei der mathematischen Lösung. Wir formulieren die Aussage nun allgemein.

Definition: die Größe

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.54}$$

heißt *generalisierter Impuls* zu q_i.

Definition: wir nennen die generalisierte Koordinate q_i *zyklisch*, wenn $\partial L / \partial q_i = 0$ gilt. Das bedeutet, q_i ist zyklisch, wenn q_i gar nicht in L vorkommt. Offenbar gilt für eine zyklische Koordinate q_i

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i - 0 = \dot{p}_i, \tag{6.55}$$

also $p_i = \text{const}$. Der zu einer zyklischen Koordinate gehörende generalisierte Impuls ist also eine Erhaltungsgröße. (Es ist sicherlich sinnvoll, die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass möglichst viele oder

sogar alle zyklisch sind. Es existiert eine Formulierung der Mechanik, die Hamilton-Jacobi-Theorie, die diese Idee ausnutzt.)

Beispiel: Planetenbewegung. Wie schon in Abschnitt 3.13 gesehen, sind Kugelkoordinaten hier praktisch. Es ist

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \tag{6.56}$$

$$V = -\frac{\gamma m M}{r} \tag{6.57}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{\gamma m M}{r}. \tag{6.58}$$

ϕ ist zyklisch! Also gilt

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \equiv L_z = \text{const.} \tag{6.59}$$

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems ist dann sogar $\vec{L} = \text{const}$. Wir wählen o.B.d.A. $\hat{z} \parallel \vec{L}$, die Bahnebene ist dann die xy-Ebene. Daher ist $\theta \equiv \pi/2$ und

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\gamma m M}{r}. \tag{6.60}$$

Die verbleibende Lagrange-Gleichung ergibt sich sofort zu

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}m\dot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma m M}{r^2} \\ &= m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\gamma m M}{r^2}. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Hier ist nun $L_z = L = mr^2\dot{\phi} = \text{const}$ und damit $\dot{\phi} = L/mr^2$. Also folgt schließlich

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\gamma m M}{r^2} = 0. \tag{6.62}$$

Man beachte, dass wir die Bewegungsgleichung hier ohne viel Mühe erhalten.

6.4.1 Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen

Eine Motivation der Lagrange-Mechanik war, dass sie für beliebige generalisierte Koordinaten gilt. Dies wird formal durch die *Forminvarianz* der Lagrange-Gleichungen unter *Punkttransformationen* ausgedrückt: Wenn

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, S \tag{6.63}$$

gilt und eine bijektive, differenzierbare Abbildung

$$q'_j = q'_j(q_1, \ldots, q_S; t), \quad j = 1, \ldots, S \tag{6.64}$$

existiert, so gibt es eine Funktion

$$L'(q'_1, \ldots, q'_S; \dot{q}'_1, \ldots, \dot{q}'_S; t), \tag{6.65}$$

so dass

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, S. \tag{6.66}$$

Beweis: Wegen der Bijektivität können wir schreiben $q_j = q_j(q'_1, \ldots, q'_S; t)$. Es folgt

$$\dot{q}_j = \sum_l \frac{\partial q_j}{\partial q'_l}\dot{q}'_l + \frac{\partial q_j}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_l} = \frac{\partial q_j}{\partial q_l}. \tag{6.67}$$

Wir beweisen hier sogar eine stärkere Aussage, dass nämlich L' gleich L ist, aber ausgedrückt durch die neuen Koordinaten $q'_l, \dot{q}'_l$:

$$L'(q'_1, \ldots, q'_S; \dot{q}'_1, \ldots, \dot{q}'_S; t) = L(q_1(q'_1, \ldots, q'_S; t), \ldots; \dot{q}_1(q'_1, \ldots, q'_S; \dot{q}'_1, \ldots, \dot{q}'_S; t), \ldots; t). \tag{6.68}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_l} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q'_l} \right) \tag{6.69}$$

und

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_l} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}'_l} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} \tag{6.70}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_l} = \sum_j \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l}}_{=\partial \dot{q}_j / \partial q'_l} \right]. \tag{6.71}$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_l} - \frac{\partial L'}{\partial q'_l} = \sum_j \underbrace{\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right]}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q'_l} = 0, \tag{6.72}$$

was zu zeigen war.

Diese Forminvarianz ist eine sehr umfangreiche Symmetrie – die Abbildung $(q_1, \ldots, q_S) \to (q'_1, \ldots q'_S)$ muss nur bijektiv und differenzierbar sein. Das ist ein riesiger Funktionenraum.

6.5 Verallgemeinerte Potentiale

Bei holonomen Zwangsbedingungen und beliebigen, nicht unbedingt konservativen, Kräften gelten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{q_j} - Q_j = 0, \tag{6.73}$$

vgl. Abschnitt 6.3. Wir hatten gesehen, dass für *konservative* Kräfte die Lagrange-Gleichungen folgen, wobei die generalisierten Kräfte als Gradienten

$$Q_j = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}}_{=0} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{6.74}$$

geschrieben werden können.

Lagrange-Gleichungen derselben Form ergeben sich aber auch für allgemeinere Kräfte, nämlich wenn ein *verallgemeinertes Potential* $U(q_1, \ldots, q_S; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_S; t)$ existiert, so dass

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{6.75}$$

Gilt. Dann folgt nämlich aus Gleichung (6.73)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \tag{6.76}$$

also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{6.77}$$

mit der *verallgemeinerte Lagrange-Funktion* $L = T - U$.

Kräfte, die nicht konservativ sind, aber (6.75) erfüllen, existieren tatsächlich. Ein Beispiel sind homogene, aber zeitabhängige Kraftfelder, z.B. $Q_1 = \alpha \sin \omega t$, was durch $U = -\alpha q_1 \sin \omega t$ beschrieben wird. Das wohl wichtigste Beispiel ist aber die Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \tag{6.78}$$

Man kann die Felder $\vec{E}, \vec{B}$ durch das skalare und das Vektorpotential ausdrücken:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{6.79}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{6.80}$$

Das verallgemeinerte Potential lautet

$$U = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) = q(\phi - \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j A_j), \tag{6.81}$$

wie wir jetzt zeigen: In kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} &= -q\frac{dA_j}{dt} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_j} + q\sum_l \dot{x}_l \frac{\partial A_l}{\partial x_j} \\ &= \underbrace{-q\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - q\frac{\partial A_j}{\partial t}}_{=qE_j} - q\sum_l \frac{\partial A_j}{\partial x_l}\dot{x}_l + q\sum_l \dot{x}_l \frac{\partial A_l}{\partial x_j}. \end{aligned} \tag{6.82}$$

Die letzten beiden Terme lauten in Vektornotation

$$-q(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + q\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = q\dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \tag{6.83}$$

Also folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} = qE_j + q(\vec{v} \times \vec{B})_j, \tag{6.84}$$

was zu zeigen war.

Zusammenfassend erhalten wir die verallgemeinerte Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen in einem beliebigen, orts- und zeitabhängigen elektromagnetischen Feld:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} - q\phi. \tag{6.85}$$

Das ist ein über die klassische Mechanik hinaus wichtiges Ergebnis.

6.6 Das Hamiltonsche Prinzip

Wir hatten die Lagrange-Gleichung aus dem d'Alembertschen Prinzip erhalten, das wiederum aus den Newtonschen Axiomen und der Definition der Zwangskräfte folgt. Das d'Alembertsche Prinzip

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \tag{6.86}$$

ist *lokal* für jeden Punkt entlang der Bahn formuliert. Wir betrachten nun ein äquivalentes Prinzip, das *global*, also für die gesamte Bahn, formuliert ist. Wir beschränken uns auf Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen. Dazu schreiben wir $\vec{q} := (q_1, \ldots, q_S)$ und nennen $\vec{q}(t)$ die *Konfigurationsbahn* des Systems.

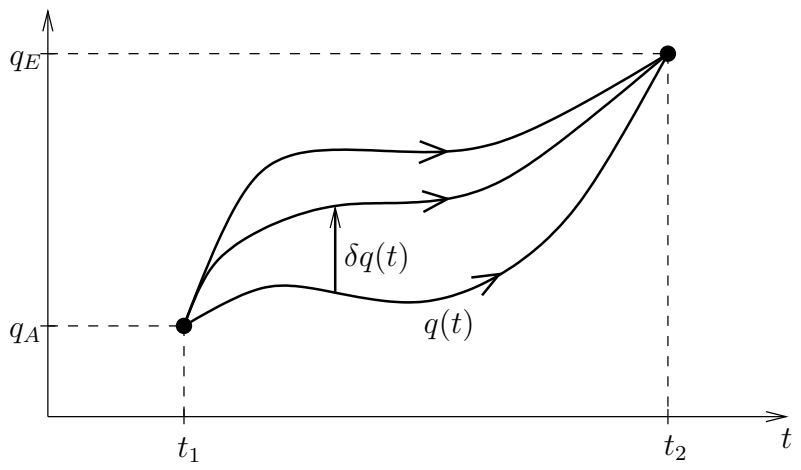
Definition: Die *Wirkung* einer Konfigurationsbahn $\vec{q}(t)$ auf dem Zeitintervall $[t_1, t_2]$ ist

$$\boxed{S[\vec{q}(t)] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t).} \tag{6.87}$$

Die Wirkung ist ein *Funktional*, d.h. eine Abbildung einer Menge von *Funktionen* (hier $\vec{q}(t)$) auf eine Menge von Zahlen.

Definition: Die *Konkurrenzschar* ist die Menge aller Konfigurationsbahnen mit gegebenen, festen Anfangs- und Endzeitpunkten t_1, t_2 und gegebenen, festen Anfangs- und Endkonfigurationen $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_A$, $\vec{q}(t_2) = \vec{q}_E$:

$$M := \left\{ \vec{q}(t) \mid \vec{q}(t_1) = \vec{q}_A \wedge \vec{q}(t_2) = \vec{q}_E \right\}. \tag{6.88}$$



Die Differenzen zwischen verschiedenen Bahnen sind wieder virtuelle Verrückungen, die $\delta\vec{q}_A = \delta\vec{q}_E = 0$ erfüllen müssen, aber sonst beliebig sind. Nützlich sind später insbesondere infinitesimale Verrückungen. Nun können wir das *Hamiltonsche Prinzip* formulieren:

$$\boxed{\text{Die tatsächliche Konfigurationsbahn } \vec{q}(t) \text{ macht die Wirkung } S[\vec{q}(t)] \text{ auf } M \text{ extremal.}}$$

Eine äquivalente Formulierung ist: Für die tatsächliche Konfigurationsbahn $\vec{q}(t)$ verschwindet die *Variation* von S für infinitesimale virtuelle Verrückungen in M:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) = 0. \tag{6.89}$$

Für das *Funktional* S entspricht das der bekannten Äquivalenz für *Funktionen* f: $f(x)$ hat ein Extremum $\Leftrightarrow df/(dx) = 0 \Leftrightarrow df = 0$. Das Symbol „$\delta$“ verhält sich im Wesentlichen wie „d“ für das totale Differential, nur sind die Argumente der Funktionals $S[\vec{q}(t)]$ nicht Zahlen, sondern ganze Funktionen, die überabzählbar unendlich viele Zahlen $q_j(t)$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ repräsentieren.

Wir beweisen nun die Äquivalenz zum d'Alembertschen Prinzip und illustrieren zugleich die Rechnung mit Variationen: Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{K}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i - \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i) \\ &= \sum_i \left(m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i) - m_i \underbrace{\dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\dot{\vec{r}}_i}_{=(1/2)\,\delta\dot{\vec{r}}_i^2} - \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i \right). \end{aligned} \tag{6.90}$$

Wir integrieren dies über $[t_1, t_2]$:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i - \frac{m_i}{2} \delta\dot{\vec{r}}_i^2 - \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i \right]. \tag{6.91}$$

Der erste Term ist (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{6.92}$$

da Anfangs- und Endkonfiguration festgehalten werden sollen: $\delta\vec{r}_i(t_1) = \delta\vec{r}_i(t_2) = 0$.

Es bleibt, nach Vorzeichenwechsel,

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta \underbrace{\left(\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 \right)}_{=T} + \underbrace{\sum_i \vec{K}_i \cdot \delta\vec{r}_i}_{=\sum_{j=1}^{S} Q_j \delta q_j} \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta T + \sum_j Q_j \delta q_j \right]. \tag{6.93}$$

Sind die Kräfte konservativ, so ist

$$\sum_j Q_j \delta q_j = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial q_j} \delta q_j = -\delta V \tag{6.94}$$

und es folgt das Hamiltonsche Prinzip:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt\, [\delta T - \delta V] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, (T - V) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta S. \tag{6.95}$$

Existiert zumindest ein verallgemeinertes Potential U, so ist

$$\begin{aligned} \sum_j Q_j \delta q_j &= \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j}_{\text{Integral ergibt Null wegen } \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0} \underbrace{- \sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j}_{= -\delta U} . \end{aligned} \tag{6.96}$$

Also folgt auch hier, wie zuvor,

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta S. \tag{6.97}$$

Die Lagrange-Gleichungen (2. Art) lassen sich recht einfach direkt aus dem Hamiltonschen Prinzip herleiten, wie wir nun zeigen wollen:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q_1(t), \ldots; \dot{q}_1(t), \ldots; t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta L(q_1(t), \ldots; \dot{q}_1(t), \ldots; t) \tag{6.98}$$

(das Zeit-Integral und die Variation vertauschen, weil bei den virtuellen Verrückungen die Zeit festgehalten wird; sie ist einfach ein Parameter)

$$\ldots = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial t} \delta t}}_{t \text{ ist fest}} \right]. \tag{6.99}$$

Wir integrieren im 2. Term partiell:

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \underbrace{\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ weil } \delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0} - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j(t). \end{aligned} \tag{6.100}$$

Nun sind die generalisierten Koordinaten für holonome Zwangsbedingungen unabhängig und daher sind $\delta q_j(t), \delta q_l(t)$ für $j \neq l$ zu derselben Zeit unabhängig. Zu verschiedenen Zeiten $t \neq t'$ sind $\delta q_j(t)$ und $\delta q_l(t')$ ohnehin unabhängig, auch für $j = l$. Das Integral kann also nur verschwinden, wenn gilt

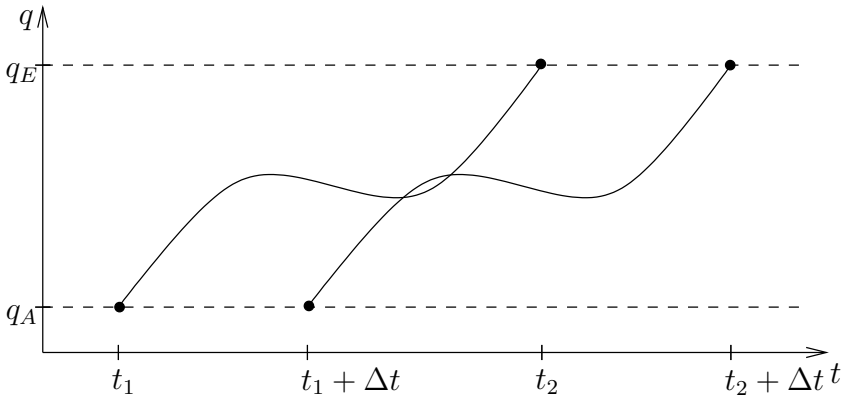
$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, S \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{6.101}$$

Das sind die Lagrange-Gleichungen.

Im Prinzip könnten wir den Ballast der Newtonschen Axiome über Bord werfen und $\delta S = 0$ als Axiom an den Anfang der Mechanik stellen. Manche Lehrbücher tun dies auch. Im Übrigen ist das Hamiltonsche Prinzip nicht nur eine sehr kompakte Formulierung der Grundlage der klassischen Mechanik, sondern auch außerhalb dieser anwendbar. Richard Feynman soll einmal auf die Frage nach der Weltformel „$\delta S = 0$“ hingeschrieben haben. Die Frage ist natürlich, wie S konkret aussieht.

6.7 Homogenität der Zeit und Energieerhaltung

Hängen kinetische und potentielle Energie und damit L nicht *explizit* von der Zeit ab, $\partial L/\partial t = 0$, so ergibt sich offenbar dieselbe Konfigurationsbahn für dieselbe Anfangs- und Endkonfiguration, unabhängig von der Anfangszeit.



Wir zeigen nun, dass in diesem Fall eine Erhaltungsgröße existiert, die Hamilton-Funktion genannt wird und mit der Gesamtenergie verwandt ist. Es ist

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right). \tag{6.102}$$

Der erste Term in der Klammer wird, mit der Lagrange-Gleichung,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j. \tag{6.103}$$

Es folgt

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right). \tag{6.104}$$

Wir hatten in Abschnitt 6.4 den *generalisierten Impuls* $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ definiert. Wir definieren außerdem die *Hamilton-Funktion*

$$\boxed{H := \sum_j p_j \dot{q}_j - L.} \tag{6.105}$$

Dann folgt

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_j p_j \dot{q}_j \right) = -\frac{d}{dt} H, \tag{6.106}$$

also wenn $\partial L/\partial t = 0$ gilt, dann

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = 0.} \tag{6.107}$$

Es ist sehr wichtig zu beachten, dass hier eine *totale* Ableitung steht. Diese bedeutet, dass $H = \text{const}$ für alle Zeiten t gilt. Dagegen bedeutet $\partial L/\partial t = 0$ nur, dass $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ ist, d.h., dass L nicht *explizit* von t abhängt. dL/dt ist i.A. nicht Null. (Als Beispiel können wir den freien Fall betrachten: In $L = T - V$ nimmt T mit der Zeit zu, V dagegen ab. Die Summe, also die Gesamtenergie, ist erhalten, die Differenz, also die Lagrange-Funktion, dagegen nicht.)

6.7.1 Das Noether-Theorem

Die Hamilton-Funktion ist also für $\partial L/\partial t = 0$ eine Erhaltungsgröße. Das folgt hier aus der Invarianz von L unter Verschiebung der Zeit: $L(t+\Delta t) = L(t)$. Das ist ein Beispiel für das wichtige *Noether-Theorem*: Für jede kontinuierliche Symmetrie von L existiert eine Erhaltungsgröße (hier ohne Beweis). Dies sind insbesondere:

- Homogenität der Zeit $\rightarrow$ Hamilton-Funktion $H = \text{const}$,
- Homogenität des Raumes $\rightarrow$ Gesamtimpuls $\vec{p} = \text{const}$,
- Isotropie des Raumes $\rightarrow$ Gesamtdrehimpuls $\vec{L} = \text{const}$.

6.7.2 Hamilton-Funktion und Energie

Was bedeutet $H = \text{const}$ physikalisch? Damit L überhaupt existiert, müssen

- alle Zwangsbedingungen holonom sein und
- zumindest ein verallgemeinertes Potential existieren.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass 1. alle Zwangsbedingungen *skleronom* und 2. alle Kräfte *konservativ* sind. Dann gilt für kartesische Koordinaten

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_S) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\, \dot{q}_j \tag{6.108}$$

und damit

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{j,l} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l}\, \dot{q}_j \dot{q}_l = \frac{1}{2}\sum_{j,l} \mu_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l \tag{6.109}$$

mit den verallgemeinerten Massen

$$\mu_{jl} := \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} = \mu_{lj}. \tag{6.110}$$

Aufgrund dieser bilinearen Form von T folgt

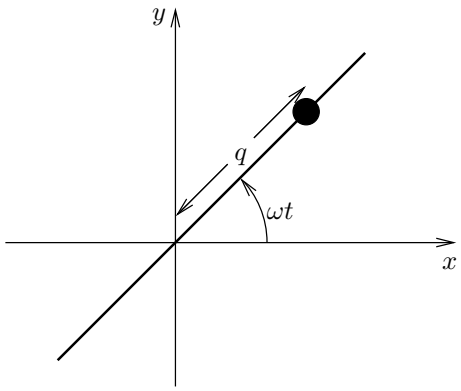
$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j &= \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{1}{2} \sum_{l,m} \mu_{lm} \dot{q}_l \dot{q}_m \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_j \left(\frac{1}{2} \sum_m \mu_{jm} \dot{q}_m + \frac{1}{2} \sum_l \mu_{lj} \dot{q}_l \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j,m} \mu_{jm} \dot{q}_j \dot{q}_m = 2T. \end{aligned} \tag{6.111}$$

Andererseits gilt für konservative Kräfte $\partial V / \partial \dot{q}_j = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} H &= \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j - L \\ &= \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\, \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) \\ &= T + V = E. \end{aligned} \tag{6.112}$$

In diesem Fall ist die Hamilton-Funktion also mit der Gesamtenergie identisch. Es gilt außerdem $\partial T / \partial t = 0$ und $\partial V / \partial t = 0$, also $\partial L / \partial t = 0$ und $dH/dt = dE/dt = 0$. Somit folgt die Energieerhaltung.

Beispiel: Perle auf gleichförmig rotierendem Draht.



Die Zwangsbedingungen lauten $z = 0$, $y = x \tan \omega t$ (rheonom!). Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2 \omega^2), \tag{6.113}$$

also $\partial L/\partial t = 0$. Es folgt $H = p\dot{q} - L = \text{const}$, wobei

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\dot{q} - L = m\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}q^2\omega^2 \\ &= \frac{m}{2}(\dot{q}^2 - q^2\omega^2). \end{aligned} \tag{6.114}$$

Andererseits ist die Gesamtenergie

$$E = T + V = T = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2\omega^2) \neq H. \tag{6.115}$$

Die Gesamtenergie ist hier nicht mit der Hamilton-Funktion identisch, da eine der Zwangsbedingungen rheonom ist. In der Tat ist hier $E = H + mq^2\omega^2$ und die Hamilton-Funktion H ist erhalten, die Gesamtenergie E aber nicht. Die Energie ändert sich, weil die Zwangskräfte Arbeit leisten.

6.8 Relativistische Mechanik

In diesem Abschnitt wollen wir die Grundideen der Mechanik im Rahmen der *Speziellen Relativitätstheorie* (SRT) untersuchen. Aus Zeitgründen kann hier keine ausführlichere Darstellung gegeben werden. Dieser Abschnitt ist insbesondere in Fällen relevant, in denen typische Geschwindigkeiten nicht klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind.

6.8.1 Einsteins Postulate

Die SRT folgt i.W. aus den folgenden beiden Postulaten:

1. Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich.
2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist unabhängig von Ort und Zeit.

Diese Postulate oder Axiome hören sich harmlos an, bringen aber die nicht-relativistische Physik zum Einsturz.

Postulat 1 ist, angewendet auf mechanische Gesetze, nichts Neues, sondern schon in der Newton-Mechanik erfüllt. Das Neue ist, dass Postulat 2 ($c = \text{const}$) als physikalisches Gesetz im Sinne von Postulat 1 verstanden wird. Postulat 2 beruht auf dem berühmten Interferenz-Experiment von Michelson und Morley (1886), wonach c in jeder Richtung relativ zur Bewegungsrichtung des Labors (d.h. der Erde) gleich ist.

Wir zeigen jetzt, dass die bisher betrachtete Mechanik den Einsteinschen Postulaten widerspricht. Wir betrachten zwei Inertialsysteme S und $\underline{S}$. $\underline{S}$ möge sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit v entlang der gemeinsamen x-Achse bewegen. In S werden zwei Lichtblitze in der positiven und negativen x-Richtung ausgesandt. Nach Postulat 2 sind ihre Geschwindigkeiten in S:

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.116}$$

In Abschnitt 3.7 hatten wir gesehen, dass aus den Newtonschen Axiomen die Galilei-Transformationen als allgemeinste Transformationen zwischen Inertialsystemen folgen. Die Galilei-Transformation liefert die folgenden Geschwindigkeiten in $\underline{S}$:

$$\underline{\vec{c}_1} = \begin{pmatrix} c - v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{c}_2} = \begin{pmatrix} -c - v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.117}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c_1} = c - v, \quad \underline{c_2} = c + v, \tag{6.118}$$

falls $v < c$ gilt. Nach Postulat 2 in Verbindung mit Postulat 1 muss aber gelten $\underline{c_1} = \underline{c_2} = c$. Wie finden also einen Widerspruch.

6.8.2 Die Lorentz-Transformation

Wenn wir die Einsteinschen Postulate zu Grunde legen, müssen wir die Galilei-Transformation (und letztlich die Newtonschen Axiome) aufgeben. Was tritt an die Stelle der Galilei-Transformation?

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme S und $\underline{S}$, deren Ursprünge zur Zeit $t = \underline{t} = 0$ zusammenfallen mögen. $\underline{S}$ bewege sich gegenüber S mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Zur Zeit $t = 0$ werde am (gemeinsamen) Ursprung eine elektromagnetische Kugelwelle ausgelöst. Dann gilt für die Wellenfront

$$\text{in } S: \quad c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{6.119}$$

$$\text{in } \underline{S}: \quad c^2\underline{t}^2 = \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2. \tag{6.120}$$

Die Transformation muss so erfolgen, dass beide Gleichungen erfüllt sind. Offenbar ist die Größe

$$s^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \equiv c^2t^2 - \vec{r}^2 \tag{6.121}$$

invariant, d.h. in beiden Bezugssystemen gleich, nämlich Null. Aufgrund der Homogenität des Raumes und der Zeit muss die Transformation $(t, \vec{r}) \to (\underline{t}, \underline{\vec{r}})$ linear sein. Wir suchen also eine lineare Transformation, die für $c^2t^2 - \vec{r}^2 = 0$ garantiert, dass gilt $c^2\underline{t}^2 - \underline{\vec{r}}^2 = 0$. Die Größe $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2$ sieht dem Betragsquadrat eines Vektors (ct, x, y, z) ähnlich, nur sind einige Vorzeichen „falsch“. Wir wissen, dass das Betragsquadrat von Vektoren unter Drehungen invariant ist, und vermuten daher, dass die gesuchte Transformation eine verallgemeinerte Drehung ist. Wir führen zunächst eine nützliche Notation ein:

- $(a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$ (beachte die hochgestellten Indizes) heißt *kontravarianter Vierervektor* (oder 4-Vektor).
- $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -\vec{a})$ heißt *kovarianter Vierervektor* (4-Vektor).
- Das *Skalarprodukt* zweier 4-Vektoren ist definiert durch

  $$\sum_{\mu=0}^{3} a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu b_\mu = a^0b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{6.122}$$

  Wir lassen das Summenzeichen $\sum_{\mu=0}^{3}$ weg, über doppelte obere und untere Indizes soll automatisch summiert werden (*Einsteinsche Summenkonvention*). Es ist offensichtlich wichtig, sorgfältig zwischen oberen und unteren Indizes zu unterscheiden. Ein Ausdruck mit doppeltem oberen oder doppeltem unteren Index ist i.A. nicht wohlgeformt, z.B. $a_\mu b_\mu$.
- Das *Betragsquadrat* eines 4-Vektors ist dann

  $$a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}. \tag{6.123}$$

  Beachte, dass $a_\mu a^\mu$ negativ werden kann.
- Es gilt offenbar

  $$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{6.124}$$

  also

  $$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \tag{6.125}$$

  und analog

  $$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \tag{6.126}$$

  wobei $g^{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ die Matrixdarstellung

  $$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.127}$$

  haben. g heißt *metrischer Tensor* oder einfach *Metrik*. Mit Hilfe des metrischen Tensors können wir Indizes heben oder senken, d.h. Vektoren zwischen kontravarianter und kovarianter Form umrechnen. Während der metrische Tensor in der SRT die angegebene Form hat und insbesondere in Raum und Zeit konstant ist, wird er in der *Allgemeinen* Relativitätstheorie selbst zu einer dynamischen Größe.

Im Beispiel ist

$$s^2 = x_\mu x^\mu \tag{6.128}$$

mit $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Die lineare Transformation von t, $\vec{r}$ auf $\underline{t}$, $\underline{\vec{r}}$ sei

$$\underline{x}_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu, \quad \underline{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu. \tag{6.129}$$

Es folgt

$$\underline{s}^2 = \underline{x}_\mu \underline{x}^\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu L^\mu{}_\lambda x^\lambda = x_\nu L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\lambda x^\lambda. \tag{6.130}$$

Es soll $\underline{s}^2 = 0$ für alle x_ν mit $s^2 = x_\nu x^\nu = 0$ gelten. Dies erfordert

$$L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\lambda = \alpha\, \delta^\nu_\lambda \tag{6.131}$$

mit einem evtl. von $\vec{v}$ abhängigen Skalar α. Das Kronecker-Symbol δ^ν_λ ist definiert wie üblich, wir haben nur darauf geachtet, den oberen Index oben zu lassen und den unteren unten. Ein beliebiges Skalarprodukt transformiert sich dann gemäß

$$\underline{a}_\mu \underline{b}^\mu = a_\nu L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\lambda b^\lambda = \alpha\, a_\nu \delta^\nu_\lambda b^\lambda = \alpha(\vec{v})\, a_\nu b^\nu. \tag{6.132}$$

Nun bewegt sich S gegenüber $\underline{S}$ mit der Geschwindigkeit $-\vec{v}$. Für die Rücktransformation gilt also

$$a_\nu b^\nu = \alpha(-\vec{v})\, \underline{a}_\mu \underline{b}^\mu. \tag{6.133}$$

Aufgrund der Isotropie des Raumes darf $\alpha(\vec{v})$ jedoch nur vom Betrag der Geschwindigkeit $\vec{v}$ abhängen, nicht von der Richtung. Also folgt

$$\underline{a}_\mu \underline{b}^\mu = [\alpha(v)]^2\, \underline{a}_\mu \underline{b}^\mu \tag{6.134}$$

und schließlich $\alpha(v) = \pm 1$. Die Lösung -1 ist aber unsinnig, da α sicherlich stetig in $\vec{v}$ sein muss und sich für $\vec{v} = 0$ die identische Transformation mit $L = \mathbb{1}$ ergeben muss. Wir finden also, dass die Transformation ganz allgemein *alle* Skalarprodukte $a_\mu b^\mu$ von 4-Vektoren invariant lassen muss.

Wir definieren eine *allgemeine Lorentz-Transformation* als eine lineare Abbildung

$$\underline{x}_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu, \quad \underline{x}^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{6.135}$$

die Skalarprodukte invariant lässt. Dann ist, wie oben gesehen, $L_\mu{}^\nu L^\mu{}_\lambda = \delta^\nu_\lambda$. Daher sind $L_\mu{}^\nu$ und $L^\mu{}_\nu$ die Komponenten zweier zueinander inversen Matrizen.

Weiter sei ein *Lorentz-Skalar* (Welt-Skalar) eine Größe, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Damit sind Skalarprodukte und speziell Betragsquadrate Lorentz-Skalare.

Wie sieht die Matrix L mit den Komponenten $L^\mu{}_\nu$ aus? Wir betrachten o.B.d.A. die Bewegung des Bezugssystems $\underline{S}$ gegenüber S entlang der gemeinsamen x-Achse mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$. Es ist sicherlich $\underline{y} = y$ und $\underline{z} = z$. Außerdem ist der Koordinatenursprung in der yz-Ebene willkürlich, also sollten $\underline{x}$ und $\underline{t}$ nicht von y, z abhängen. Damit ist

$$L = \begin{pmatrix} L^0{}_0 & L^0{}_1 & 0 & 0 \\ L^1{}_0 & L^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.136}$$

Also ist

$$c\underline{t} = L^0{}_0 ct + L^0{}_1 x, \tag{6.137}$$

$$\underline{x} = L^1{}_0 ct + L^1{}_1 x. \tag{6.138}$$

Nun soll für alle x, t gelten

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 &= c^2\underline{t}^2 - \underline{x}^2 = (L^0{}_0 ct + L^0{}_1 x)^2 - (L^1{}_0 ct + L^1{}_1 x)^2 \\ &= \left[(L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2\right] c^2t^2 + 2\left[L^0{}_0 L^0{}_1 - L^1{}_0 L^1{}_1\right] ctx + \left[(L^0{}_1)^2 - (L^1{}_1)^2\right] x^2. \end{aligned} \tag{6.139}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2 = 1, \tag{6.140}$$

$$L^0{}_0 L^0{}_1 - L^1{}_0 L^1{}_1 = 0, \tag{6.141}$$

$$(L^0{}_1)^2 - (L^1{}_1)^2 = -1. \tag{6.142}$$

Speziell für den Ursprung von $\underline{S}$ gilt

$$x = vt = \frac{v}{c}\,ct \tag{6.143}$$

und damit

$$\underline{x} = 0 = L^1{}_0 ct + L^1{}_1 x = \left(L^1{}_0 + L^1{}_1 \frac{v}{c}\right) ct \tag{6.144}$$

$$\Rightarrow \qquad L^1{}_0 + L^1{}_1 \frac{v}{c} = 0. \tag{6.145}$$

Zusammen mit den Gleichungen (6.140)–(6.142) haben wir nun 4 Gleichungen für 4 Unbekannte. Die Lösung ist

$$L^1{}_1 = L^0{}_0 \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma \tag{6.146}$$

$$L^1{}_0 = L^0{}_1 \quad = \quad -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =: -\beta\gamma \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}, \tag{6.147}$$

wie man durch Einsetzen bestätigt.

Also ist

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.148}$$

und die Lorentz-Transformation lautet

$$c\underline{t} \quad = \quad \gamma ct - \beta\gamma x, \tag{6.149}$$

$$\underline{x} \quad = \quad -\beta\gamma ct + \gamma x. \tag{6.150}$$

Für $v \ll c$ ergibt sich $\gamma \to 1$, $\beta \to 0$, $\beta c = v$, also die Galilei-Transformation. Der nicht-relativistische Grenzfall kommt also richtig heraus.

6.8.3 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Strategie ist jetzt: Wir müssen alle Größen als Lorentz-Skalare oder Vierervektoren formulieren (oder höhere Tensoren, die wir hier aber nicht brauchen), dann verhalten sie sich unter Transformationen zwischen Inertialsystemen richtig. Mit Hilfe dieser Größen formulierte Gesetze erfüllen das erste Postulat. Wir kennen bisher den Orts-Vierervektor x^μ. Für die Lagrange-Mechanik brauchen wir zumindest noch einen Geschwindigkeits-Vierervektor (Vierergeschwindigkeit) u^μ. Wie sieht dieser aus? Der Ansatz

$$u^\mu \overset{?}{:=} \frac{dx^\mu}{dt} \tag{6.151}$$

ist keine gute Idee, denn $t = x^0/c$ ist *kein* Lorentz-Skalar: wir haben gerade gesehen, dass sich $t \to \underline{t}$ unter Lorentz-Transformationen ändert. Damit ist dx^μ/dt kein Vierervektor. Wir benötigen also zunächst einen *Skalar* der Zeit. Eine vernünftige Wahl ist die *Eigenzeit* τ, also die auf einer mitgeführten Uhr gemessene Zeit. Wir benötigen das Differential $d\tau$. Es ist

$$c^2 d\tau^2 - 0 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2. \tag{6.152}$$

Die linke Seite der Gleichung bezieht sich auf das mitgeführte Koordinatensystem, in dem die Uhr natürlich keinen Weg zurücklegt. (Da wir nur ein infinitesimales $d\tau$ betrachten, ist unerheblich, ob das Teilchen eine beschleunigte Bewegung ausführt.) Es folgt

$$c^2 d\tau^2 \quad = \quad c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = (c^2 - v^2) dt^2 \tag{6.153}$$

$$\Rightarrow \quad d\tau \quad = \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \frac{dt}{\gamma}. \tag{6.154}$$

Da $\gamma \geq 1$ ist, vergeht die Eigenzeit immer *langsamer* als die Laborzeit (*Zeitdilatation*). Nun können wir die Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{6.155}$$

als korrekten Vierervektor definieren. Es ist $u^\mu = \gamma dx^\mu/dt$ mit Komponenten

$$u^0 = \gamma \frac{dct}{dt} = \gamma c, \tag{6.156}$$

$$\vec{u} = \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma \vec{v} \quad \text{mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit } \vec{v}. \tag{6.157}$$

Also ist

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - \vec{u}\cdot\vec{u} = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2. \tag{6.158}$$

Das ist offensichtlich ein Lorentz-Skalar. Da s die Bogenlänge entlang einer Weltlinie ist, ist $u^\mu = dx^\mu/d\tau = c\,dx^\mu/ds$ Tangentenvektor an der Weltlinie.

6.8.4 Lagrange-Gleichung für das freie Teilchen

Um die Lagrange-Mechanik für ein relativistisches Teilchen zu formulieren, können wir vom Hamiltonschen Prinzip ausgehen: $\delta S = 0$. Sicherlich müssen die Wirkung S und die Lagrange-Funktion L Lorentz-Skalare sein. Das erreichen wir durch die Definition der Wirkung

$$S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\, L(x^0, x^1, x^2, x^3; u^0, u^1, u^2, u^3; \tau) \tag{6.159}$$

Diese führt analog zu Abschnitt 6.6 auf die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{6.160}$$

Wie muss L für ein *freies* Teilchen aussehen?

1. L darf nicht von Orts-Vierervektor (Raum-Zeit-Punkt) x^μ oder von τ abhängen.
2. L muss ein Lorentz-Skalar sein, der nur vom Vierervektor u^μ abhängt. Daher kann L nur vom Skalar $u_\mu u^\mu$ abhängen.
3. Für $v \ll c$ muss der nicht-relativistische Grenzfall

$$L_0\, dt = \frac{1}{2} m v^2 dt \tag{6.161}$$

herauskommen, zumindest bis auf ein totales Differential.

Wir setzen, mit einer noch unbestimmten Proportionalitätskonstanten α,

$$\begin{aligned} L\,d\tau &= \alpha\sqrt{u_\mu u^\mu}\,d\tau = \alpha c\frac{dt}{\gamma} = \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt \\ &\overset{v\ll c}{\cong} \alpha c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)dt \\ &= \underbrace{\alpha c dt}_{\text{irrelevantes totales Differential}} - \frac{1}{2c}\alpha v^2 dt. \end{aligned} \tag{6.162}$$

Also müssen wir $\alpha = -mc$ setzen und erhalten

$$L = -mc\sqrt{u_\mu u^\mu}. \tag{6.163}$$

Die Lagrange-Gleichungen enthalten Ableitungen nach Komponenten von Vierervektoren. Wir müssen kurz diskutieren, wie diese Ableitungen definiert sind. Da sicherlich gilt

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^0} = \frac{\partial x^1}{\partial x^1} = \cdots = 1, \tag{6.164}$$

folgt

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\mu} = 4 \tag{6.165}$$

(vgl. $\operatorname{div}\vec{r} = 3$). Dies legt nahe, dass die Ableitungen nach *kontravarianten* Komponenten x^μ einen *kovarianten* Vektor bilden, denn sonst wäre der Ausdruck $\partial x^\mu / \partial x^\mu$ nicht wohlgeformt. Wir schreiben also

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{6.166}$$

und analog

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{6.167}$$

Man kann leicht zeigen, dass sich die ∂_μ tatsächlich wie kovariante Komponenten transformieren: Es gilt

$$\underline{x}_\nu = L_\nu{}^\mu x_\mu \quad \text{und} \quad \underline{x}^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu. \tag{6.168}$$

Aus der Kettenregel und der zweiten Gleichung folgt

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \underline{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \underline{x}^\nu} = L^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial \underline{x}^\nu} = L^\nu{}_\mu \underline{\partial}_\nu. \tag{6.169}$$

Wegen $L_\nu{}^\lambda L^\nu{}_\mu = \delta^\lambda_\mu$ lautet die Umkehrung

$$\underline{\partial}_\nu = L_\nu{}^\mu \partial_\mu. \tag{6.170}$$

Vergleich mit der ersten Gleichung in (6.168) ergibt die Behauptung.

Die Komponenten von ∂^μ und ∂_μ lauten

$$(\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right), \tag{6.171}$$

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \tag{6.172}$$

Beachte, dass die Vorzeichen im Vergleich zu

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}), \tag{6.173}$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{r}) \tag{6.174}$$

umgekehrt sind.

Nun können wir die Lagrange-Gleichungen auswerten. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial u^\mu}\sqrt{g_{\nu\rho}u^\nu u^\rho} \\ &= -mc\frac{d}{d\tau}\frac{g_{\nu\rho}(\delta^\nu_\mu u^\rho + u^\nu \delta^\rho_\mu)}{2\sqrt{g_{\nu\rho}u^\nu u^\rho}} = -mc\frac{d}{d\tau}\frac{\cancel{2}u_\mu}{\cancel{2}\sqrt{u_\rho u^\rho}} \\ &= -m\frac{du_\mu}{d\tau} \end{aligned} \tag{6.175}$$

für $\mu = 0, 1, 2, 3$. Also folgt

$$u^0 = \gamma c = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \text{const} \tag{6.176}$$

und

$$\vec{u} = \gamma \vec{v} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \text{const}. \tag{6.177}$$

Die erste Gleichung ist redundant, da $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ist. Also finden wir $\vec{v} = \text{const}$, wie im nicht-relativistischen Grenzfall – ein kräftefreies Teilchen bewegt sich gleichförmig und geradlinig. Newtons erstes Axiom bleibt also in der SRT gültig.

6.8.5 Lagrange-Gleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

Im nicht-relativistischen Fall hatten wir

$$L = \frac{m}{2}v^2 + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi. \tag{6.178}$$

Wir verwenden nun Gaußsche Einheiten, was für die relativistische Formulierung nützlich ist. Dies führt zu dem zusätzlichen Faktor $1/c$ im 2. Term. Der 2. und 3. Term sehen schon sehr nach einem Skalarprodukt aus. Wir definieren das Vierervektorpotential

$$(A_0, A_1, A_2, A_3) := \left(\phi, -\vec{A}\right) \tag{6.179}$$

und „raten“ die relativistische Form der Lagrange-Funktion,

$$L = -mc\sqrt{u_\nu u^\nu} - \frac{q}{c}\, u^\nu A_\nu. \tag{6.180}$$

Den ersten Term hatten wir schon für das freie Teilchen gefunden. Die Lagrange-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \\ &= -m\frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c}\frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, u^\nu A_\nu \\ &= -m\frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c}\frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \tag{6.181}$$

Durch Einsetzen von $u_\mu = dx_\mu/d\tau$ folgt

$$m\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = -\frac{q}{c}\frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \tag{6.182}$$

Man kann zeigen, dass für $v \ll c$ die Bewegungsgleichung mit der bekannten Lorentz-Kraft herauskommt.

Beispiel: Gleichförmiges $\vec{E}$-Feld in x-Richtung. In diesem Fall ist

$$\vec{E} = E\hat{x} \tag{6.183}$$

und eine sinnvolle Wahl der Potentiale ist $\phi = -Ex$ und $\vec{A} = 0$. Dann ist $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = E\hat{x}$. Es folgt $A_0 = -Ex \equiv -Ex^1, A_1 = A_2 = A_3 = 0$ und die Bewegungsgleichungen lauten, für u_0:

$$m\frac{du_0}{d\tau} = -\frac{q}{c}\frac{dA_0}{d\tau} + \frac{q}{c}u^0\frac{\partial A_0}{\partial x^0} = \frac{qE}{c}\frac{dx^1}{d\tau} - \cancel{\frac{qE}{c}\, u^0 \underbrace{\frac{\partial x^1}{\partial x^0}}_{=0}}. \tag{6.184}$$

Es folgt

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{du_0}{d\tau} = \frac{qE}{mc}\frac{dx^1}{d\tau} = \frac{qE}{mc}\, u^1. \tag{6.185}$$

Und für u_1:

$$m\frac{du_1}{d\tau} = \cancel{-\frac{q}{c}\frac{dA_1}{d\tau}} + \frac{q}{c}\, u^0\frac{\partial A_0}{\partial x^1} = -\frac{q}{c}u^0 E = -\frac{qE}{c}\, u^0. \tag{6.186}$$

Es folgt

$$\frac{du^1}{d\tau} = -\frac{du_1}{d\tau} = +\frac{qE}{mc}\, u^0. \tag{6.187}$$

Wir erhalten also zwei gekoppelte Differentialgleichungen für u^0 und u^1. Wenn wir jeweils eine in die andere einsetzen, erhalten wir

$$\frac{d^2u^0}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc}\frac{du^1}{d\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 u^0, \tag{6.188}$$

$$\frac{d^2u^1}{d\tau^2} = \frac{qE}{mc}\frac{du^0}{d\tau} = \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 u^1. \tag{6.189}$$

Wir betrachten speziell die Anfangsbedingung $v(0) = 0 \Rightarrow u^0(0) = c, u^1(0) = u^2(0) = u^3(0) = 0$ („Teilchen in Ruhe“). Dann ist die Lösung

$$u^0(\tau) = c\cosh\frac{qE}{mc}\,\tau, \tag{6.190}$$

$$u^1(\tau) = c\sinh\frac{qE}{mc}\,\tau. \tag{6.191}$$

(Beachte zur Probe, dass wir

$$u_\mu u^\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 = c^2\left(\cosh^2\frac{qE}{mc}\,\tau - \sinh^2\frac{qE}{mc}\,\tau\right) = c^2 \tag{6.192}$$

erhalten, wie es sein muss.)

Weiter folgt für die zusätzlichen Anfangsbedingungen $x^\mu(0) = 0$:

$$ct = x^0(\tau) = \int_0^\tau d\tau'\, u^0(\tau') = \frac{mc^2}{qE} \sinh \frac{qE}{mc}\tau \tag{6.193}$$

$$\begin{aligned} x = x^1(\tau) &= \int_0^\tau d\tau'\, u^1(\tau') = \frac{mc^2}{qE}\left(\cosh\frac{qE}{mc}\tau - 1\right) \\ &= \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{\sinh^2\frac{qE}{mc}\tau + 1} - 1\right) = \frac{mc^2}{qE}\left(\sqrt{\left(\frac{qE}{mc}t\right)^2 + 1} - 1\right). \end{aligned} \tag{6.194}$$

Für kleine Zeiten ist dies

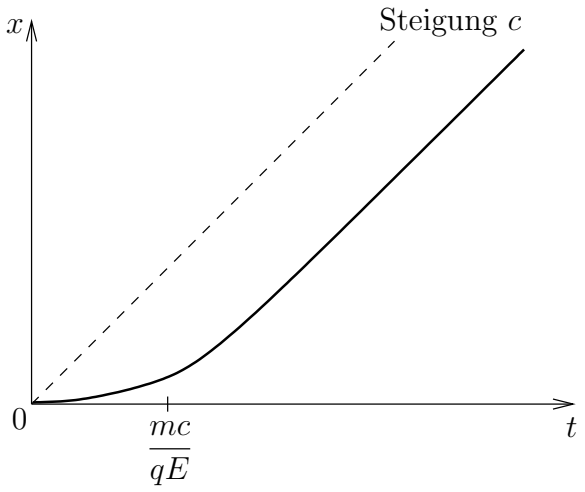
$$x \cong \frac{mc^2}{qE}\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2 \cancel{-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \equiv \frac{1}{2}at^2. \tag{6.195}$$

Das ist genau die nicht-relativistische, gleichförmig beschleunigte Bewegung. Unsere Rechnung stimmt also im nicht-relativistischen Grenzfall.

Für große Zeiten folgt dagegen

$$x \cong \frac{mc^2}{qE}\frac{qE}{mc}t = ct. \tag{6.196}$$

Das Teilchen bewegt sich für $t \gg mc/qE$ praktisch mit Lichtgeschwindigkeit. Es wird aber trotz des gleichförmigen Feldes niemals schneller als c.



Kapitel 7

Hamilton-Mechanik

Wir haben in Kapitel 6 den sehr leistungsfähigen Lagrange-Formalismus kennengelernt. Seine Stärke beruht v.a. auf der Forminvarianz der Bewegungsgleichungen unter fast beliebigen Transformationen der generalisierten Koordinaten, $\vec{q} \to \vec{q}'$. In diesem Kapitel betrachten wir den Hamilton-Formalismus, der, wie die Newton-Mechanik, zur Lagrange-Mechanik äquivalent ist. Warum machen wir uns also die Mühe? Das hat mehrere Gründe:

1. Der Hamilton-Formalismus ist rechentechnisch vorteilhaft bei zyklischen Koordinaten,
2. er hat eine noch höhere Symmetrie (Invarianz) als die Lagrange-Mechanik und macht die formale Struktur der mechanischen Gesetze klarer,
3. bei konservativ-skleronomen Systemen ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie und ist somit anschaulicher als die Lagrange-Funktion,
4. der Hamilton-Formalismus eignet sich besser zum Übergang zur Quantenmechanik und zur statistischen Physik (die Lagrange-Mechanik eignet sich dagegen besser zum Übergang zur relativistischen Physik und zur Feldtheorie).

7.1 Kanonische Gleichungen

Die Hamiltonsche Formulierung geht von der Hamilton-Funktion

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L \quad \text{mit} \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{7.1}$$

aus. Um partielle Ableitungen von H ausrechnen zu können, müssen wir festlegen, von welchen Variablen die Funktion H abhängen soll. Naheliegende, aber nicht zwingende, Möglichkeiten sind $\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t$ oder $\vec{q}, \vec{p}, t$. Dazu betrachten wir das totale Differential

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j (dp_j)\dot{q}_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j - dL \\ &= \sum_j \left[(dp_j)\dot{q}_j + \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, d\dot{q}_j} \right] - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt \\ &= \sum_j \left[-\frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j + \dot{q}_j dp_j \right] - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Wir erhalten dieselbe Form, wenn wir H als $H(q_1, \ldots, q_S; p_1, \ldots, p_S; t)$ schreiben:

$$dH = \sum_j \left[\frac{\partial H}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j}\, dp_j \right] + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt. \tag{7.3}$$

Da die $q_1, \ldots; p_1, \ldots; t$ unabhängig sind, können wir die Koeffizienten gleichsetzen:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j} \overset{\text{Gl. (6.39)}}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -\dot{p}_j, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{7.6}$$

Die ersten beiden Gleichungen bilden die *kanonischen* oder *Hamiltonschen Gleichungen*

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{für } j = 1, \ldots, S,} \tag{7.7}$$

$$\boxed{\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{für } j = 1, \ldots, S.} \tag{7.8}$$

Dies sind $2S$ Differentialgleichungen *erster* Ordnung, die den S Lagrangeschen (Differential-) Gleichungen 2. Ordnung äquivalent sind.

Bemerkung: Die Abbildung $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ war gerade so konstruiert, dass aus dH die Terme in $d\dot{q}_j$ herausfallen, so dass es *natürlich* war, H durch $q_1, \ldots; p_1, \ldots; t$ auszudrücken. Man nennt $q_1, \ldots, q_S$ und $p_1, \ldots, p_S$ *kanonisch konjugierte* Variablen. Man kann H i.A. auch durch $q_1, \ldots; \dot{q}_1, \ldots; t$ ausdrücken, wie wir es für L getan haben, aber dies führt nicht auf einfache Gleichungen. Diese Art von Abbildung nennt man *Legendre-Transformation* (in der Mathematik mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert).

Die Gleichung $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ ist ebenfalls bemerkenswert. Wir wissen aus Abschnitt 6.7, dass gilt

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{7.9}$$

Also folgt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}; \tag{7.10}$$

für H sind partielle und totale Zeitableitungen identisch. Insbesondere gilt:

$$\boxed{H \text{ hängt nicht explizit von der Zeit ab} \Leftrightarrow H = \text{const ist Erhaltungsgröße.}}$$

7.1.1 Zyklische Koordinaten

Eine Koordinate q_j ist gemäß Abschnitt 6.4 zyklisch, wenn sie in L nicht vorkommt. Dann folgt

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \text{const} =: c_j. \tag{7.11}$$

Nach den kanodischen Gleichungen ist dann aber auch

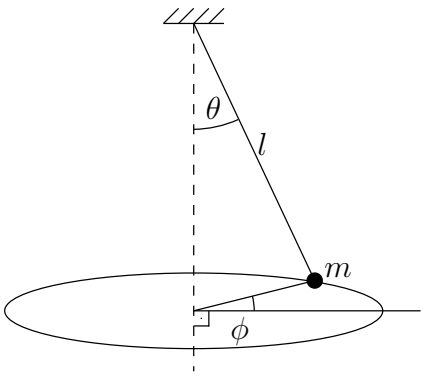
$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0, \tag{7.12}$$

also kommt q_j auch in H nicht vor. Für zyklische Koordinaten ist der Hamilton-Formalismus besonders nützlich: H hängt im Prinzip von q_j und p_j ab, aber für zyklisches q_j fällt q_j heraus und $p_j = c_j$ ist gar keine dynamische Variable, sondern eine Konstante, die wir i.A. aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Damit können wir schreiben

$$H = H_{c_j}(q_1, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots; t) \tag{7.13}$$

(c_j ist hier ein Parameter ähnlich zu Massen, Ladungen usw.). Wir haben also die Anzahl der Freiheitsgrade um 2 reduziert. Im Lagrange-Formalismus funktioniert das nicht, weil für zyklisches q_j zwar der Impuls p_j konstant ist, aber i.A. nicht die Geschwindigkeit $\dot{q}_j$, die in der Lagrange-Funktion auftritt.

Beispiel: Dreidimensionales Pendel.



Die kinetische und potentielle Energie lauten

$$T = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2), \tag{7.14}$$

$$V = -mgl\cos\theta, \tag{7.15}$$

also ist die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) + mgl\cos\theta. \tag{7.16}$$

Es folgt

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad\Rightarrow\quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \tag{7.17}$$

und

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = ml^2\sin^2\theta\dot{\phi} \quad\Rightarrow\quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}. \tag{7.18}$$

Damit lautet die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - L \\ &= \frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta} - \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Es ist entscheidend, dass H hier durch die Impulse p_θ und p_ϕ ausgedrückt wurde. Wir erkennen, dass ϕ zyklisch ist. Also ist p_ϕ $(= L_z)$ erhalten und wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Wir müssen nur noch die Variablen θ und p_θ beachten. Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \tag{7.20}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -\frac{p_\phi^2}{2ml^2}\,\frac{-2}{\sin^3\theta}\,\cos\theta - mgl\sin\theta = \frac{L_z^2}{ml^2}\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - mgl\sin\theta. \tag{7.21}$$

Es folgt

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}_\theta}{ml^2} = \frac{L_z^2}{m^2l^4}\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\,\sin\theta. \tag{7.22}$$

Diese Gleichung für $\theta(t)$ könnten wir nun lösen, vermutlich numerisch. Man beachte, dass sich für $L_z = 0$ die bekannte Bewegungsgleichung für das ebene Pendel ergibt.

7.1.2 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Ein wichtiger Fall ist das Teilchen in einem beliebigen elektromagnetischen Feld, für das die verallgemeinerte Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} - q\phi. \tag{7.23}$$

Es folgt für den generalisierten Impuls, in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}, \tag{7.24}$$

offensichtlich verschieden vom Impuls $m\dot{\vec{r}}$ in Newtons 2. Axiom. Es folgt $\dot{\vec{r}} = (\vec{p} - q\vec{A})/m$ und damit

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - L \\ &= \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\right)^2 - q\,\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\cdot\vec{A} + q\phi \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p}-q\vec{A})^2 + q\phi. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Dies sieht so aus, als hätten wir den Impuls um $-q\vec{A}$ verschoben. Diese Form der Kopplung an das Vektorpotential („minimale Kopplung“) ist wichtig in praktisch allen Zweigen der Physik.

7.1.3 Forminvarianz unter Punkttransformationen

Wir hatten in Abschnitt 6.4 gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen unter bijektiven, differenzierbaren Punkttransformationen $\vec{q} \to \vec{q}'(\vec{q}, t)$ invariant sind, wobei sich die Lagrange-Funktion einfach gemäß

$$L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t) \tag{7.26}$$

transformiert. Wie transformiert sich dabei die Hamilton-Funktion? Mit

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \tag{7.27}$$

ergibt sich

$$p'_j = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} = \sum_l \left(\cancel{\frac{\partial L}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}'_j}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{q}'_j}\right) = \sum_l p_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_j} \tag{7.28}$$

und damit

$$H' = \sum_j p'_j \dot{q}'_j - L' = \sum_{jl} p_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_j}\,\dot{q}'_j - L' = \sum_l p_l \dot{q}_l - L' \tag{7.29}$$

oder ausführlicher

$$H'(\vec{q}', \vec{p}', t) = \sum_l p_l(\vec{q}', \vec{p}', t)\dot{q}_l(\vec{q}', \vec{p}', t) - L(\vec{q}(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t). \tag{7.30}$$

Also erhalten wir H' aus H auch einfach durch Einsetzen der neuen Koordinaten und der *dazugehörigen* Impulse. Für die neuen Variablen folgt ganz analog zur obigen Herleitung

$$\dot{q}'_j = \frac{\partial H'}{\partial p'_j}, \quad \dot{p}'_j = -\frac{\partial H'}{\partial q'_j}, \quad \frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial L'}{\partial t}. \tag{7.31}$$

Wir werden aber später sehen, dass die kanonischen Gleichungen noch unter einer sehr viel größeren Klasse von Transformationen invariant sind als unter Punkttransformationen.

7.2 Die Poisson-Klammern

Wir führen zunächst zwei Begriffe ein: Der S-dimensionale Raum aller möglichen $\vec{q}$ heißt *Konfigurationsraum.* Der $2S$-dimensionale Raum aller möglichen $(\vec{q}, \vec{p}) = (q_1, \ldots, q_S; p_1, \ldots, p_S)$ heißt *Phasenraum.* $(\vec{q}, \vec{p})$ beschreibt den Zustand des Systems eindeutig.

Sei $f = f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion („Phasenfunktion“), die z.B. eine Messgröße des Systems darstellen kann. Dann ist ihre zeitliche Änderung

$$\frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\dot{p}_j\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7.32}$$

Der Summenausdruck hat eine bemerkenswerte Symmetrie. Wir definieren die *Poisson-Klammer* zweier Funktionen f und g durch

$$\{f, g\} \equiv \{f, g\}_{\vec{q},\vec{p}} := \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\right). \tag{7.33}$$

Die Bewegungsgleichung (7.32) wird damit

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7.34}$$

Damit können wir nun die Bewegungsgleichung für *beliebige* Größen aufstellen, egal ob sie zu den gewählten kanonischen Variablen $(\vec{q}, \vec{p})$ gehören oder nicht.

Speziell lauten die kanonischen Gleichungen nun

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\}, \tag{7.35}$$

$$\dot{p}_j = \{p_j, H\}. \tag{7.36}$$

Außerdem ergibt sich

$$\frac{dH}{dt} = \cancel{\{H, H\}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{7.37}$$

wie wir schon wissen. Weiter findet man leicht die *fundamentalen Poisson-Klammern*

$$\{q_i, q_j\} = 0, \tag{7.38}$$

$$\{p_i, p_j\} = 0, \tag{7.39}$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{7.40}$$

Nun wissen wir bereits, dass wir die Koordinaten $\vec{q}$ fast beliebig transformieren können. Der Nutzen der Poisson-Klammern wird durch folgenden Satz untermauert: Sei $(\vec{q}, \vec{p})$ ein Satz kanonischer Variablen. Sei $(\vec{Q}, \vec{P})$ ein anderer Satz kanonischer Variablen. Dann ist für zwei Phasenfunktionen F, G:

$$\{F, G\}_{\vec{q},\vec{p}} = \{F, G\}_{\vec{Q},\vec{P}}. \tag{7.41}$$

Die Poisson-Klammern sind also unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\{F, G\}_{\vec{q},\vec{p}} &= \sum_j \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_{jkl} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{\partial G}{\partial Q_l} \frac{Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right\} \\
&= \sum_{jkl} \left\{ \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_l} \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial P_l} \left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right\} \\
&= \sum_{kl} \left[\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \{Q_k, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_l} \{Q_k, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \{P_k, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} + \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial P_l} \{P_k, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} \right].
\end{aligned} \tag{7.42}$$

Die hier benötigten Poisson-Klammern können wir ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_j &= \{Q_j, H\}_{\vec{q},\vec{p}} \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_{kl} \left\{ \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_k} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_k} \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

Hier ist $\tilde{H}$ die Hamilton-Funktion zu $\vec{Q}, \vec{P}$; wir hatten gesehen, dass gilt $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Es ergibt sich

$$\dot{Q}_j = \sum_l \left[-\dot{P}_l \{Q_j, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} + \dot{Q}_l \{Q_j, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} \right]. \tag{7.44}$$

Daraus folgt aber durch Koeffizientenvergleich

$$\{Q_j, Q_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0, \tag{7.45}$$
$$\{Q_j, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = \delta_{jl}. \tag{7.46}$$

Analog erhält man noch

$$\{P_j, P_l\}_{\vec{q},\vec{p}} = 0. \tag{7.47}$$

Einsetzen in Gl. (7.42) ergibt

$$\{F, G\}_{\vec{q},\vec{p}} = \sum_{kl} \left[\frac{\partial F}{\partial Q_k} \frac{\partial G}{\partial P_l} \delta_{kl} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_l} \delta_{kl} \right] = \{F, G\}_{\vec{Q},\vec{P}}, \tag{7.48}$$

was zu zeigen war. Damit können wir die Angabe der jeweiligen kanonischen Variablen – $\vec{q}, \vec{p}$ oder $\vec{Q}, \vec{P}$ – fallen lassen.

Wir stellen einige Identitäten zusammen, die leicht zu beweisen sind: Für alle Phasenfunktionen gilt

1. $\{f, f\} = 0$,
2. $\{f, g\} = -\{g, f\}$,
3. $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$,
4. $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$,
5. $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (*Jacobi-Identität*).

Damit, in Verbindung mit den fundamentalen Poisson-Klammern (7.38)-(7.40)), lassen sich die meisten Poisson-Klammern nun algebraisch ausrechnen, ohne die darin vorkommenden Ableitungen nach q_j, p_j explizit ausführen zu müssen.

7.2.1 Poissonscher Satz

Eine nützliche Eigenschaft der Poisson-Klammern wird durch den Poissonschen Satz ausgedrückt: Sind F und G Erhaltungsgrößen, so ist es auch $\{F, G\}$.

Beweis: Für Erhaltungsgrößen ist

$$0 = \frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{7.49}$$
$$0 = \frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}. \tag{7.50}$$

Nach der Jacobi-Identität folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F, G\} &= \{\{F, G\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} \\ &= -\{\{G, H\}, F\} - \{\{H, F\}, G\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} \\ &= \cancel{\left\{\frac{\partial G}{\partial t}, F\right\}} - \cancel{\left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\}} + \cancel{\left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\}} - \cancel{\left\{\frac{\partial G}{\partial t}, F\right\}} = 0, \end{aligned} \tag{7.51}$$

was zu zeigen war. Dies führt aber nicht immer zu einer neuen und interessanten Erhaltungsgröße.

Beispiel: für ein Teilchen gilt

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\ &= \{yp_z, zp_x\} - \{yp_z, xp_z\} - \{zp_y, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} \\ &= yz\{p_z, p_x\} + z\{y, p_x\}p_z + \dots \end{aligned} \tag{7.52}$$

Hier sind aber nur solche Terme sind von Null verschieden, die die fundamentalen Klammern $\{r_j, p_j\}$ oder $\{p_j, r_j\}$ enthalten:

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= y\{p_z, z\}p_x - 0 - 0 + x\{z, p_z\}p_y \\ &= -yp_x + xp_y = L_z. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Sind also die x- und y-Komponente des Drehimpulses erhalten, so muss auch die z-Komponente erhalten sein. Oder allgemeiner: es können nicht genau zwei Komponenten von $\vec{L}$ erhalten sein.

Formal ähnliche Beziehungen treten auch in der Quantenmechanik auf, im Zusammenhang mit dem sogenannten Kommutator.

7.3 Kanonische Transformationen

Wir hatten gesehen, dass die Lagrange-Gleichungen und auch die kanonischen Gleichungen forminvariant unter Punkttransformationen sind. Es wurde erwähnt, dass die kanonischen Gleichungen unter einer noch größeren Klasse von Transformationen forminvariant sind. Diese wollen wir hier untersuchen.

Definition: Eine *Phasentransformation*

$$Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p}, t), \tag{7.54}$$

$$P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p}, t) \tag{7.55}$$

ist eine Punkttransformation im Phasenraum.

Definition: Die Phasentransformation $(\vec{q}, \vec{p}) \to (\vec{Q}, \vec{P})$ heißt *kanonisch*, falls eine Funktion $\tilde{H} = \tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ existiert, so dass gilt

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} \tag{7.56}$$

für $j = 1, \ldots, S$. In anderen Worten, eine Phasentransformation ist kanonisch, wenn die neuen Koordinaten und Impulse ebenfalls kanonischen Gleichungen gehorchen.

Ist $\tilde{H}$ darüberhinaus gegeben durch $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t)$, d.h. geht $\tilde{H}$ aus H einfach durch Einsetzen der neuen Variablen hervor, so heißt die Transformation *kanonisch im engeren Sinne.*

Beispiel: Die Transformation

$$Q_j = -p_j, \quad P_j = q_j \tag{7.57}$$

ist kanonisch im engeren Sinne, denn mit $\tilde{H} = H(\vec{P}, -\vec{Q}, t)$ gilt

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} = \frac{\partial H(\vec{P}, -\vec{Q}, t)}{\partial P_j} = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = \dot{Q}_j \tag{7.58}$$

und

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} = \frac{\partial H(\vec{P}, -\vec{Q}, t)}{\partial Q_j} = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial p_j} = -\dot{q}_j = -\dot{P}_j. \tag{7.59}$$

Die begriffliche Unterscheidung von Koordinaten und Impulsen wird in der Hamilton-Mechanik also fast bedeutungslos.

Wann ist eine Phasentransformation aber nun kanonisch? Eine Antwort gibt der folgende Satz: Die Phasentransformation $(\vec{q}, \vec{p}) \to (\vec{Q}, \vec{P})$ ist kanonisch, falls gilt

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - H = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt} \tag{7.60}$$

mit einer beliebigen, hinreichend oft differenzierbaren *erzeugenden Funktion*

$$F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t). \tag{7.61}$$

Beweisidee: Wir schreiben das Hamiltonsche Prinzip um:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H \right), \tag{7.62}$$

wobei $\vec{q}(t_1)$ und $\vec{q}(t_2)$ fest sind. Das soll auch für die neuen Variablen gelten:

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - \tilde{H} \right) \tag{7.63}$$

mit $\vec{Q}(t_1)$ und $\vec{Q}(t_2)$ fest. Die Differenz lautet

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H - \sum_j P_j \dot{Q}_j + \tilde{H} \right). \tag{7.64}$$

Das gilt sicherlich, falls der Ausdruck $\sum_j p_j \dot{q}_j - H - \sum_j P_j \dot{Q}_j + \tilde{H}$ gleich einer totalen Zeitableitung dF_1/dt ist. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - H - \sum_j P_j \dot{Q}_j + \tilde{H} \right) &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{dF_1}{dt} \\ &= \delta \left(F_1 \left(\vec{q}(t_2), \vec{Q}(t_2), t_2 \right) - F_1 \left(\vec{q}(t_1), \vec{Q}(t_1), t_1 \right) \right) = 0. \end{aligned} \tag{7.65}$$

Wie sieht die Transformation für gegebene Funktion F_1 nun aus? Es ist

$$dF_1 = \sum_{j=1}^{S} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \, dq_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \, dQ_j \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \, dt. \tag{7.66}$$

Andererseits folgt aus (7.60)

$$dF_1 = \sum_{j=1}^{S} \left(p_j dq_j - P_j dQ_j \right) + \left(\tilde{H} - H \right) dt. \tag{7.67}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, \tag{7.68}$$

$$P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \tag{7.69}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \tag{7.70}$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir die alten Variablen $\vec{q}$, $\vec{p}$ eliminieren, um die neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ zu erhalten.

7.3.1 Äquivalente erzeugende Funktionen

Man zeigt ähnlich, dass die erzeugende Funktion auch folgende Formen haben kann:

- $F_1 = F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ (der obige Fall), dann ist $p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j}, P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j}, \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$,
- $F_2 = F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$, dann ist $p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j}, \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$,
- $F_3 = F_3(\vec{p}, \vec{Q}, t)$, dann ist $q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, P_j = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j}, \tilde{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$,
- $F_4 = F_4(\vec{p}, \vec{P}, t)$, dann ist $q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, Q_j = \frac{\partial F_4}{\partial P_j}, \tilde{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$.

Die erzeugende Funktion hängt also immer von einem alten und einem neuen Variablensatz ab.

Beispiele: 1. Für $F_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) = -\sum_j q_j Q_j$ erhalten wir

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} = -Q_j, \quad P_j = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = q_j. \tag{7.71}$$

Dies ist also die Vertauschung (bis auf das Vorzeichen) von Koordinaten und Impulsen, die wir schon kennengelernt hatten.

2. Wir betrachten den harmonischen Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2. \tag{7.72}$$

Die generalisierte Koordinate q ist offensichtlich nicht zyklisch. Es wäre nützlich, auf neue kanonische Variablen Q, P zu transformieren, so dass Q zyklisch ist. Dazu betrachten wir die Erzeugende

$$F_1(q, Q, t) = \frac{1}{2}\, m\omega_0 q^2 \cot Q. \tag{7.73}$$

Es ist

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega_0 q \cot Q, && (7.74)\\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2}\, m\omega_0 q^2\, \frac{1}{\sin^2 Q}, && (7.75)\\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H. && (7.76) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{P} &= 2m\omega_0 \underbrace{\cot^2 Q}_{=\frac{\cos^2 Q}{\sin^2 Q}} \sin^2 Q = 2m\omega_0 \cos^2 Q && (7.77)\\ \Rightarrow \quad p &= \sqrt{2m\omega_0 P} \cos Q && (7.78) \end{aligned}$$

und

$$q = \frac{p}{m\omega_0 \cot Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q \tag{7.79}$$

und damit

$$\tilde{H} = \omega_0 P \cos^2 Q + \omega_0 P \sin^2 Q = \omega_0 P. \tag{7.80}$$

Nun ist Q tatsächlich zyklisch! Gemäß Abschnitt 7.1 ist dann

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \text{const} = P(0) \tag{7.81}$$

und

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad Q = \omega_0 t + Q(0). \tag{7.82}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P(0)}{m\omega_0}}\, \sin(\omega_0 t + Q(0)), && (7.83)\\ P &= \sqrt{2m\omega_0 P(0)}\, \cos(\omega_0 t + Q(0)). && (7.84) \end{aligned}$$

Die Lösung der kanonischen Gleichungen ist also trivial geworden. Der Preis dafür ist, dass wir die erzeugende Funktion F_1 finden mussten, wofür wir noch kein Verfahren kennen. $F_1 = (1/2)m\omega_0 q^2 \cot Q$ zu raten, erscheint aussichtslos.

7.4 Hamilton-Jacobi-Theorie

Wir haben wiederholt gesehen, dass zyklische Koordinaten die Lösung stark vereinfachen. Es wäre daher nützlich, alle Koordinaten mittels einer kanonischen Transformation zyklisch zu machen. Noch besser wäre, wenn auch die zugehörigen Impulse nicht in der Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ auftreten würden. Es erscheint kaum glaublich, dass das möglich sein könnte, aber es existiert tatsächlich ein Verfahren, das genau dies erreicht.

Es sei $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ gegeben. Wir fordern mutig, dass $\tilde{H}(\vec{Q}, \vec{P}, t) \equiv 0$ gelten soll. Dann sind die kanonischen Gleichungen alle trivial:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_j = \text{const}, && (7.85)\\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = \text{const}. && (7.86) \end{aligned}$$

Wir können alle $(\vec{Q}, \vec{P})$ aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Es ist zweckmäßig, eine erzeugende Funktion vom Typ $F_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ zu wählen. Es soll gelten

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \tag{7.87}$$

Die gesuchte Funktion F_2 nennt man auch *Hamiltonsche Wirkungsfunktion* $S(\vec{q}, \vec{P}, t)$. Einsetzen von $p_j = \partial F_2/\partial q_j$ in (7.87) ergibt

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_S; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_S}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.} \tag{7.88}$$

Das ist die *Hamilton-Jacobi-Gleichung*. Es handelt sich im Unterschied zu allen bisher betrachteten Gleichungen um eine *partielle* Differentialgleichung, da sie partielle Ableitungen der gesuchten Funktion F_2 enthält. Sie ist 1. Ordnung, da nur erste Ableitungen auftreten. Dafür gibt es leistungsfähige Lösungsverfahren, die aber über den Stoff dieser Vorlesung hinausgehen.

Beachte, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung nur die $\vec{q}$- und t-Abhängigkeit von F_2 betrifft, aber nicht die $\vec{P}$-Abhängigkeit. Da diese durch die Gleichung nicht eingeschränkt wird, können wir die P_j beliebig wählen. Wir wollen aber erreichen, dass $P_j = \text{const}$ gilt, also setzen wir

$$P_j =: \alpha_j = \text{const} \quad \text{für } j = 1, \ldots, S. \tag{7.89}$$

Haben wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung gelöst, so sind die neuen Koordinaten

$$Q_j(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = \frac{\partial F_2(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \alpha_j} =: \beta_j = \text{const} \quad \text{für } j = 1, \ldots, S. \tag{7.90}$$

Dies sind S algebraische Gleichungen für S Unbekannte $q_j = q_j(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$. Daraus erhalten wir schließlich die Impulse

$$p_j(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = \frac{\partial F_2(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial q_j}, \quad j = 1, \ldots, S \tag{7.91}$$

und damit erhalten wir die allgemeine Lösung für $(\vec{q}, \vec{p})$ abhängig von $2S$ freien Parametern $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, die wir z.B. aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Beispiel: Der harmonische Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2. \tag{7.92}$$

Wir suchen $F_2(q, P, t)$, so dass gilt

$$H\left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \tag{7.93}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \tag{7.94}$$

Wir lösen diese Gleichung mit dem *Separationsansatz* $F_2(q, P, t) = W(q, P) + V(t, P)$:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = -\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{7.95}$$

Die linke Seite hängt von q, aber nicht von t ab, die rechte von t, aber nicht von q. Damit beide für alle q, t gleich sind, müssen sie beide konstant sein (P ist nur ein Parameter):

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 = \alpha \quad (= \text{const}) \tag{7.96}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha. \tag{7.97}$$

Es folgt einerseits

$$V = -\alpha t + \text{const} \tag{7.98}$$

und andererseits

$$\frac{dW}{dq} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega_0^2 q^2} = m\omega_0\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \tag{7.99}$$

$$\Rightarrow \quad W = m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} + \text{const.} \tag{7.100}$$

Wir können P beliebig konstant wählen und wählen daher $P = \alpha$. Dann ist

$$F_2(q, \alpha, t) = W + V = m\omega_0 \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} - \alpha t + \underbrace{\text{const}}_{\text{irrelevant}} . \tag{7.101}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = m\omega_0 \int dq \frac{1}{2\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}} \frac{2}{m\omega_0^2} - t \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2}} - t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin\left(\omega_0 \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\, q\right) - t. \end{aligned} \tag{7.102}$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung stellt aber sicher, dass $Q = \text{const} =: \beta$ ist. Wir stellen nach q um:

$$q = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin \omega_0(t + \beta). \tag{7.103}$$

Weiter ist der Impuls

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{dW}{dq} = m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - q^2} \tag{7.104}$$

und mit q eingesetzt

$$\begin{aligned} p &= m\omega_0 \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega_0^2} - \frac{2\alpha}{m\omega_0^2} \sin^2 \omega_0(t + \beta)} \\ &= \sqrt{2\alpha m} \cos \omega_0(t + \beta). \end{aligned} \tag{7.105}$$

Damit haben wir die allgemeine Lösung gefunden, die wie erwartet zwei Parametern α, β enthält. Es ist natürlich dieselbe Lösung, die wir schon gut kennen.

Der Hamilton-Jacobi-Formalismus ist zugegebenermaßen nicht sehr nützlich bei der Lösung des ohnehin einfachen Problems des harmonischen Oszillators. Er ist aber konzeptionell interessant: Wir haben S gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung (Lagrange) in $2S$ gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung (Hamilton) und dann in *eine* partielle Differentialgleichung 1. Ordnung (Hamilton-Jacobi) übersetzt. Alle drei Formalismen sind im Wesentlichen äquivalent.